

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta040

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze $\sin 1 + \sin(-1)$.
- (4p) b) Să se calculeze aria unui triunghi ABC dacă $AB = 10$, $AC = 8$ și $m(\hat{B}AC) = 60^\circ$.
- (4p) c) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(2,0)$ și $B(1,1)$.
- (4p) d) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ dacă dreptele $d_1 : x - 2y + 3 = 0$ și $d_2 : \alpha x + 4y - 2 = 0$ sunt paralele.
- (2p) e) Să se calculeze partea reală a numărului $i + i^5 + i^{10} + i^{20} + i^{2007}$.
- (2p) f) Să se arate că punctul $A(2,1)$ aparține cercului $x^2 + y^2 = 5$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbf{C}(X)$ $f = X^3 + X^2 + 4X + 4$ și $g = X^2 + 2X + 2$.
 - (3p) a) Să se calculeze $f(-1) + g(-1)$.
 - (3p) b) Să se determine câtul împărțirii polinomului f prin polinomul g .
 - (3p) c) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului f .
 - (3p) d) Să se calculeze $g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
 - (3p) e) Să se determine rădăcinile polinomului g .
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 4x$.
 - (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
 - (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2}$.
 - (3p) c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(2,0)$.
 - (3p) d) Să se arate că graficul funcției f are un punct de inflexiune.
 - (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x^3} \right)^{x^2}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 040

SUBIECTUL III (20p)

În inelul matricelor $M_2(\mathbf{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și submulțimea $G = \{X \in M_2(\mathbf{C}) \mid AX = XA\}$.

- (4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- (4p) b) Să se arate că $A^2 + AB + B = I_2$.
- (4p) c) Să se rezolve ecuația $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X \in M_{2,1}(\mathbf{C})$.
- (2p) d) Să se arate că dacă $X \in G$, atunci există $a, b \in \mathbf{C}$ astfel încât $X = aI_2 + bB$.
- (2p) e) Să se calculeze $A + A^2 + \dots + A^{2007}$.
- (2p) f) Să se calculeze $(A - B + I_2)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se determine o matrice $X \in G$ astfel încât $\det(X) = 2007$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$.

- (4p) a) Să se arate că $f(x) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
- (4p) c) Să se arate că există două asymptote la graficul funcției f .
- (2p) d) Să se arate că f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n))$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- (2p) g) Să se arate că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x = 1$ și $x = 2$ este mai mică decât $\frac{1}{2}$.

Varianta 040

SUBIECTUL I

- a) $\sin 1 + \sin(-1) = \sin 1 - \sin 1 = 0$.
- b) Aria triunghiului este $\frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{2} = 20\sqrt{3}$.
- c) $AB = \sqrt{2}$.
- d) Condiția de paralelism implica $\frac{1}{\alpha} = \frac{-2}{4}$. Rezultă $\alpha = -2$.
- e) Cum $i + i^5 + i^{10} + i^{20} + i^{2007} = i$, partea reală este 0.
- f) Avem $2^2 + 1^2 = 5$, deci punctul $A(2,1)$ aparține cercului $x^2 + y^2 = 5$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $f(-1) + g(-1) = 1$.
- b) Avem $f = g(X-1) + 4X + 6$. Atunci $c = X-1$.

c) Suma rădăcinilor polinomului f este -1 .

d) Soluția 1. Folosind relațiile lui Vieta obținem

$$g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1 + x_2 + x_3) + 2 = -3.$$

Soluția 2. Rădăcinile lui f sunt $x_1 = -1$, $x_2 = 2i$ și $x_3 = -2i$. Prin înlocuire și efectuarea calculelor se obține $g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) = -3$.

e) Rădăcinile polinomului g sunt $x_1 = -1+i$ și $x_2 = -1-i$.

2.

a) $f'(x) = 3x^2 - 4$, $x \in \mathbf{R}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = f'(2) = 8$.

c) Ecuația dreptei tangente la graficul funcției este $y - f(2) = f'(2)(x-2)$. Se obține $8x - y - 16 = 0$.

d) Funcția f este continuă pe \mathbf{R} , și avem $f''(x) = 6x$, $x \in \mathbf{R}$. Aceasta implică $x=0$ unicul punct de inflexiune.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x^3} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 4x}{x^3} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-4}{x^2} \right)^{\frac{x^2}{-4}} \right]^{-4} = \frac{1}{e^4}.$

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = -1$ și $\text{rang}(A) = 2$.

b) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci

$$A^2 + AB + B = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = I_2.$$

c) Soluția 1. Deoarece $\det(A) \neq 0$ și $A^2 = I_2$, matricea A este inversabilă și $A^{-1} = A$.

Atunci $X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soluția 2. Dacă $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, atunci ecuația revine la sistemul $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -y = 1 \end{cases}$, care admite

soluția $x = 3$ și $y = -1$. Deci $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Condiția $AX = XA$ implică $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Se observă că $X = aI_2 + bB$.

e) Cum $A^2 = I_2$, avem $A + A^2 + \dots + A^{2007} = 1004A + 1003I_2 = \begin{pmatrix} 2007 & 2008 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

f) Avem $A - B + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Folosind principiul inducției matematice se arată că

$$(A - B + I_2)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

g) Dacă $X \in G$, atunci $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Ecuația $\det(X) = 2007$ revine la

$a(a-b) = 2007$. Pentru $a = 2007$ și $b = 2006$ se obține $X = \begin{pmatrix} 2007 & 2006 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV

a) Calcul direct.

b) $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$, $x > 0$.

c) Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, avem că $y = 0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, rezultă că $x = 0$ este asimptota verticală la dreapta. Continuitatea funcției f pe $(0, \infty)$, asigură faptul că nu mai există altă asimptotă.

d) Deoarece $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} < 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

e) Folosind a) obținem $\sum_{k=1}^n f(k) = 1 - \frac{1}{n+1}$ pentru orice $n \geq 1$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

f) $\int_1^2 f(x) dx = \ln \frac{4}{3}$.

g) Valoarea ariei considerate este $\int_1^2 f(x) dx = \ln \frac{4}{3}$.