

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta039

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(2, -1)$ și $B(5, 3)$.
- (4p) b) Să se determine $a > 0$ dacă punctul $M(a, 0)$ aparține elipsei $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
- (4p) c) Să se calculeze $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.
- (4p) d) Să se determine aria cercului înscris în pătratul de latură 2.
- (2p) e) Să se calculeze distanța de la punctul $C(1,1)$ la dreapta de ecuație $x + y = 1$.
- (2p) f) Să se determine $a \in \mathbb{C}$ dacă $z = 1+i$ este soluție a ecuației $z^2 - 2z + a = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $C_n^2 = 10$.
- (3p) b) Să se determine al zecelea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu $a_1 = 1$, $a_2 = 3$.
- (3p) c) Să se determine probabilitatea ca o soluție a ecuației $z^4 = 1$ să fie reală.
- (3p) d) Se notează cu g inversa funcției $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Să se calculeze $g(5)$.
- (3p) e) Să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^4 - 2X^2 + 5$ la polinomul $g = X - \sqrt{2}$.

 2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot \ln x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(1)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
- (3p) c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^e f'(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

- (2p)** a) Să se arate că, dacă $x, y \in (-1,1)$, atunci $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$.

Pe mulțimea $G = (-1,1)$ se consideră legea de compoziție " \circ " definită prin

$$x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}, \quad \forall x, y \in G.$$

- (4p)** b) Să se verifice egalitatea $x \circ y = \frac{(1+x)(1+y)-(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)+(1-x)(1-y)}$, $\forall x, y \in G$.

- (2p)** c) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in G$.

- (4p)** d) Să se determine $e \in G$, astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in G$.

- (4p)** e) Să se arate că $\forall x \in G$, există $y \in G$ astfel încât $x \circ y = y \circ x = 0$.

- (2p)** f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in G$,

$$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = \frac{(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) - (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)}{(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) + (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)}.$$

- (2p)** g) Să se arate că $\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \dots \circ \frac{1}{n} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}$.

- (4p)** a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (4p)** b) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

- (4p)** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

- (2p)** d) Să se determine ecuația asymptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f .

- (2p)** e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + \dots + f(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

- (2p)** f) Să se arate că $\int_0^x \sqrt{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{a^2}{2} \ln a$,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall a > 0.$$

- (2p)** g) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

VARIANTA 039

SUBIECTUL I

a) $AB = \sqrt{9+16} = 5$

b) Punând condiția ca m să verifice ecuația elipsei obțin $\frac{a^2}{2} = 1$ și cum $a > 0$, convine numai $a = 2$

c) $\tg \frac{\pi}{3} + \tg \frac{\pi}{4} = \sqrt{3} + 1$

d) Cercul înscris în pătratul de latură 2 are diametrul egal cu latura pătratului, adică raza 1; deci aria cercului este π

e) Distanța cerută este $\frac{|1+1-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $a = 2z - z^2 = 2(1+i) - (1+i)^2 = 2 + 2i - 2i = 2$

SUBIECTUL II

1.

a) Evident $n \geq 2$ și convin $n = 5$

b) $a_{10} = a_1 + 9r$ unde $r = a_2 - a_1 = 2$; deci $a_{10} = 1 + 18 = 19$

c) Deoarece soluțiile ecuației $z^4 = 1$ sunt 1, -1, i, -I, probabilitatea ca o soluție să fie reală este

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

d) Evident $g(x) = \frac{x-3}{2}$ și $g(5) = 1$

e) Restul este $f(\sqrt{2}) = 4 - 4 + 5 = 5$

2.

a) $f(1) = 1 \ln 1 = 0$

b) $f'(x) = \ln x + 1 (\forall) x > 0$

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ și cum în jurul său f' își schimbă semnul rezultă $x = \frac{1}{e}$

punct de extreime local

d) $\int_1^e f'(x) dx = f(e) - f(1) = e \ln e - 1 \ln 1 = e$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ (am aplicat l'Hopital)

SUBIECTUL III

a) $|x| < 1$ și $|y| < 1 \Rightarrow |xy| < 1$ sau $-1 < xy < 1$ sau $1 + xy > 0$. Inegalitățile $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$

sunt echivalente cu $-1 - xy < x + y < 1 + xy (\forall)x, y \in (-1, 1)$. Prima este echivalentă cu $(1+x)(1+y > 0)$, iar a doua cu $(1-x)(1-y) > 0$, care sunt echivalente

b) Se verifică prin calcul direct

c) Se calculează $(x \circ y) \circ z$ și se obține $\frac{(1+x)(1+y)(1+z) - (1-x)(1-y)(1-z)}{(1+x)(1+y)(1+z) + (1-x)(1-y)(1-z)}$, iar apoi $x \circ (y \circ z)$ dă același rezultat

d) Se obține $e = 0 \in G$

e) Se obține $y = -x \in G$

f) Cum verificarea s-a făcut, să arătăm că $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Avem $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n \circ x_{n+1} =$

$$= \frac{(1+x_1 \circ \dots \circ x_n)(1+x_{n+1}) - (1-x_1 \circ \dots \circ x_n)(1-x_{n+1})}{(1+x_1 \circ \dots \circ x_n)(1+x_{n+1}) + (1-x_1 \circ \dots \circ x_n)(1-x_{n+1})} =$$

$$= \frac{2(1+x_1) \dots (1+x_n)(1+x_{n+1}) - 2(1-x_1) \dots (1-x_n)(1-x_{n+1})}{2(1+x_1) \dots (1+x_n)(1+x_{n+1}) + 2(1-x_1) \dots (1-x_n)(1-x_{n+1})}$$

g) $\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \dots \circ \frac{1}{n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n+1}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \dots \frac{n-1}{n}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n+1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \dots \frac{n-1}{n}} =$

$$= \frac{\frac{n+1}{2} - \frac{1}{n}}{\frac{n+1}{2} + \frac{1}{n}} = \frac{n^2 + n - 2}{n^2 + n + 2}$$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} (\forall)x \in R$

b) $f'(x) = x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) < 0, (\forall)x > 0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $[0; +\infty)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală către $-\infty$

e) $f(\sqrt{k}) = \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n f(\sqrt{k}) = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) = \sqrt{n+2} - \sqrt{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(\sqrt{k})}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - \sqrt{\frac{2}{n}} \right)}{\sqrt{n}} = 1$$

f) $\int_0^x \sqrt{t^2 + a^2} dt = \int_0^x \frac{t^2 + a^2}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt = \int_0^x t \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt + a^2 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt = t \sqrt{t^2 + a^2} \Big|_0^x -$
 $- \int_0^x \sqrt{t^2 + a^2} dt + a^2 \ln(t + \sqrt{t^2 + a^2}) \Big|_0^x \Rightarrow \int_0^x \sqrt{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) -$
 $- \frac{a^2}{2} \ln a$

g) Deoarece f este strict pozitivă și continuă pe $(0;1]$ rezultă că aria cerută este

$$\int_0^1 (\sqrt{x^2 + 2}) dx - \int_0^1 (\sqrt{x^2 + 1}) dx \text{ și aplicând punctual f) pentru } x=1 \text{ și } a=\sqrt{2}, \text{ respectiv } x=1 \text{ și } a=1,$$

$$\text{obțin: } \int_0^1 f(x) dx = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} + \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$$