EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

Varianta ….**038**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze $\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}$.

(4p) **b)** Să se determine partea reală a numărului complex $(1-2i)(1+2i)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $m(A\hat{B}C)$, dacă triunghiul ABC este isoscel şi $m(B\hat{A}C)=\frac{5\pi}{6}$.

(4p) **d)** Să se calculeze $\cos B$ dacă în triunghiul ABC lungimile laturilor sunt: $AB=4, BC=5, AC=6$.

(2p) **e)** Să se determine numărul punctelor de intersecție dintre dreapta $y=x$ şi cercul de ecuație $x^2+y^2=8$.

(2p) **f)** Să se calculeze modulul numărului complex $(1+2i)^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze în câte feluri pot fi alese 3 probleme dintr-un set de 5 probleme.

(3p) **b)** Să se determine mulțimile X care verifică egalitatea $X \cup \{3,5\}=\{3,5,7\}$.

(3p) **c)** Să se calculeze care este probabilitatea ca un element x al mulțimii $\{1,2,4,5,6\}$ să fie soluție a inecuației $\frac{-1}{3-x}<0$.

(3p) **d)** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $3^{-2x-1}=3^{x^2}$.

(3p) **e)** Să se dea un exemplu de polinom f de gradul al treilea cu coeficienți intregi pentru care $f(1)=0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}-\{1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-1}$.

(3p) **a)** Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

(3p) **c)** Să se compare numerele $a=f(2)$ şi $b=f(\sqrt{5})$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot f(n)$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_2^3 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În $M_3(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul matricei A şi să se determine rangul acesteia.

(4p) **b)** Să se arate că matricea B este inversabilă.

(4p) **c)** Să se calculeze B^2 şi B^3.

(2p) **d)** Să se determine matricea $X \in M_3(\mathbf{R})$ pentru care $B \cdot X = A$.

(2p) **e)** Să se arate, folosind eventual metoda inducției matematice, că

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+3)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(2p) **f)** Să se determine matricele $Y \in M_3(\mathbf{R})$ pentru care $A \cdot Y = Y \cdot A$.

(2p) **g)** Să se arate că nu există nici o matrice $Z \in M_3(\mathbf{R})$ pentru care $Z^2 = A$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$; $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se ordoneze crescător termenii a_1, a_2 şi a_3.

(4p) **b)** Să se demonstreze că $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că şirul a_n este strict crescător.

(2p) **d)** Să se demonstreze că $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4} + a_n\right)^{n^2}$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)(x+2)}dx$.

Varianta 038

SUBIECTUL I

a) $\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

b) 5.

c) $m\left(A\hat{B}C\right)=\frac{\pi}{12}$

d) Deoarece $AC^2=BA^2+BC^2-2\cdot BA\cdot BC\cdot\cos B$, rezultă $\cos B=\frac{1}{8}$.

e) Sistemul $\begin{cases} x=y \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$ revine la ecuația $x^2=4$ care admite două soluții, deci dreapta este secantă cercului, adică există două puncte de intersecție.

f) $\left|(1+2i)^2\right|=5$.

SUBIECTUL II

1.

a) $C_5^3=10$.

b) $X_1=\{7\}$, $X_2=\{7,3\}$, $X_3=\{7,5\}$, $X_4=\{3,5,7\}$.

c) $p=\frac{2}{5}$.

d) $x=-1$.

e) Se poate alege $f=X^3-X^2$

2.

a) Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, rezultă că $y=0$ este asimptota orizontală spre $-\infty$.

b) $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

c) Deoarece $f'(x)<0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$, rezultă că f este descrescătoare. Atunci $f(2)>f\left(\sqrt{5}\right)$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1$.

e) $\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\frac{1}{x-1}dx=\ln|x-1|\Big|_2^3=\ln 2$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A)=0$ şi $\operatorname{rang}(A)=2$, deoarece $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3\neq 0$.

b) Cum $\det(B)=1\neq 0$, rezultă că matricea B este inversabilă.

c) $B^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $B^3=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

d) Cum matricea B este inversabilă, rezultă că $X=B^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

e) Pentru $n=1$ are loc egalitatea $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{1\cdot 4}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Presupunem că

$B^k=\begin{pmatrix}1 & k & \frac{k\cdot(k+3)}{2}\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi demonstrăm că $B^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & k+1 & \frac{(k+1)\cdot(k+4)}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Avem

$B^{k+1}=B^k\cdot B=\begin{pmatrix}1 & k+1 & \frac{k^2+5k+4}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & k+1 & \frac{(k+1)\cdot(k+4)}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Atunci

$B^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n\cdot(n+3)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

f) Fie $Y=\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{pmatrix}$, atunci egalitatea $A\cdot Y=Y\cdot A$ implică

$\begin{pmatrix} x+2p & y+2q & z+2r \\ 3p & 3q & 3r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a & 2a+3b \\ 0 & x & 2x+3y \\ 0 & p & 2p+3q \end{pmatrix}$, de unde rezultă $Y=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 3b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

g) Dacă $Z=A^2$, atunci $Z\cdot A=A\cdot Z$ şi folosind f) avem $Z=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 3b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Egalitatea

$Z=A^2$ implică $\det(Z)=\det\left(A^2\right)=0$, ceea ce implică $a=0$. Deci $Z=\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 3b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

şi $Z^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq A$ pentru orice $b,c\in\mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV

a) $a_1=\frac{1}{6}<a_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}<a_3=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}$

b) Calcul direct.

c) Cum $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}>0$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$ rezultă că şirul $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

d) Folosind b) avem

$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$,

$\forall n\in\mathbf{N}^*$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4}$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}+a_n\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{2(n+1)(n+2)}\right)^{n^2}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

g) $\int_1^2\frac{1}{x(x+1)(x+2)}dx=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$.