

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....036***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $\sqrt{2} - \sqrt{7}i$ .
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu extremitățile în punctele  $A(7, 2)$  și  $C(11, 3)$ .
- (4p) c) Să se determine partea reală a numărului complex  $z = i + i^4 + i^6 + i^{11}$ .
- (4p) d) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât punctele  $A(7, 2)$  și  $C(11, 3)$  să aparțină dreptei de ecuație  $x + ay + b = 0$ .
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele  $A(7, 2)$ ,  $B(2, 2)$  și  $C(11, 3)$ .
- (2p) f) Dacă  $\sin x = \frac{4}{5}$  să se calculeze  $\cos^2 x$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se determine elementul  $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot \hat{7}$  în  $(\mathbf{Z}_8, \cdot)$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $C_7^3 - C_7^4 + C_{10}^{10}$ .
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația  $\log_4 x = 2$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $16^x = 32^x$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $5^n > 30$ .

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^5 + 4x^3 - 5$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt[n]{n} + 3}{7\sqrt[n]{n} + 2}$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră multimile  $A = \{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \mid f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0\}$ ,

$B = \{g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \mid g(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + \dots + a_0, \quad a_4, a_3, \dots, a_0 \in \mathbf{R}, a_4 \neq 0\}$ ,

$C = \{u \circ v \mid u, v \in A\}$ , unde “ $\circ$ ” reprezintă operația de compunere a funcțiilor.

- (4p) a) Să se arate că dacă  $u, v \in A$ , atunci  $u \circ v \in B$ .

- (4p) b) Să se verifice că dacă  $f \in A$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , atunci

$$f\left(-\frac{b}{2a} + x\right) = f\left(-\frac{b}{2a} - x\right), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

- (4p) c) Să se arate că funcția  $s : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $s(x) = x^4$  este un element al mulțimii  $C$ .

- (2p) d) Să se găsească o funcție  $g \in B$  cu proprietatea  $g(1-x) = g(1+x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

- (2p) e) Să se arate că funcția  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h(x) = x^4 + x + 1$  are proprietatea că  $\forall a \in \mathbf{R}$ , există  $x \in \mathbf{R}$  astfel încât  $h(a-x) \neq h(a+x)$ .

- (2p) f) Utilizând relația de la punctul b), să se arate că dacă  $w \in C$ , atunci există  $c \in \mathbf{R}$ , astfel încât  $w(c-x) = w(c+x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

- (2p) g) Să se arate că multimea  $B - C$  este nevidă.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$  și  $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$F(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se verifice identitatea  $F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

- (4p) b) Să se verifice că  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

- (4p) c) Să se arate că  $(x-1)F(x) = x^5 - 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

- (2p) d) Să se arate că  $F(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

- (2p) e) Să se arate că funcția  $F$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .

- (2p) f) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot f(n)}{F(n)}$ .

- (2p) g) Să se rezolve în  $\mathbf{R}$  ecuația  $f(x^3) = 1$ .

## VARIANTA 036

### SUBIECTUL I

a)  $|\sqrt{2} - i\sqrt{7}| = \sqrt{2+7} = 3$

b)  $AC = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

c)  $z = 1 + i^4 + i^6 + i^{11} = 1 + 1 + i^2 + i^3 = 1 - i \Rightarrow \text{Real } z = 1$

d) Formez sistemul  $\begin{cases} 7 + 2a + b = 0 \\ 11 + 3a + b = 0 \end{cases}$  cu solutia  $\begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases}$

e) Aria  $[ABC] = \frac{|\Delta|}{2}$  unde  $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 11 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2(14 - 4) = -20$ , deci Aria  $[ABC] = 10$

f)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

### SUBIECTUL II

1.

a)  $\hat{1} \cdot \hat{2} \dots \hat{7} = \left( \hat{2} \cdot \hat{4} \right) \cdot \hat{1} \cdot \hat{3} \cdot \hat{5} \cdot \hat{6} \cdot \hat{7} = \hat{0}$

b)  $C_7^3 - C_7^4 + C_{10}^{10} = C_7^3 - C_7^3 + C_{10}^{10} = 1$

c)  $\log_4 x = 2 \Leftrightarrow x = 16$

d)  $16^x = 32^x \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{5x} \Leftrightarrow 4x = 5x \Leftrightarrow x = 0$

e) Deoarece numai 3, 4 si 5 verifică inegalitatea  $5^n > 30$ , probabilitatea ceruta este  $\frac{3}{5}$

2.

a)  $f'(x) = 5x^4 + 12x^2 (\forall) x \in R$

b)  $\int_0^1 f(x) dx = \left( \frac{x^6}{6} + x^4 - 5x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} + 1 - 5 = -\frac{23}{6}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$

d)  $f'(x) = 5x^4 + 12x^2 \geq 0 (\forall) x \in R \Rightarrow f$  crescătoare pe R

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n} + 3}{7\sqrt{n} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left( 4 + \frac{3}{\sqrt{n}} \right)}{\sqrt{n} \left( 7 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right)} = \frac{4}{7}$

### SUBIECTUL III

a) Fie  $u(x) = ax^2 + bx + c, v(x) = a'x^2 + b'x + c$  cu  $a, b, c, a', b', c' \in R, a, a' \neq 0$ ;

am  $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = a(a'x^2 + b'x + c)^2 + b(a'x^2 + b'x + c) + c$  și se vede că deoarece  $a \cdot a' \neq 0$ , coeficientul lui  $x^4$  este nenul adică  $u \circ v \in B$

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

b) Fie  $f \in A, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in R, a \neq 0$ ; atunci  $f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} (\forall) x \in R$ ;

$$\left. \begin{array}{l} f\left(-x - \frac{b}{2a}\right) = ax^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ f\left(-\frac{b}{2a} + x\right) = ax^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{array} \right\} \text{de unde } f\left(-x - \frac{b}{2a}\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + x\right) \quad (\forall)x \in R$$

c)  $s(x) = x^4 = (x^2)^2$  și notez  $u(x) = v(x) = x^2$  și am  $u, v \in A$  și  $(u \circ v)(x) = s(x)$ ,

deci  $s \in C$

d) Fie  $g(x) = (x-1)^4 \in B$ ; am  $g(1-x) = x^4, g(1+x) = x^4$  deci  $g(1-x) = g(1+x) \quad (\forall)x \in R$

e) Presupun că  $(\exists)a \in R$  cu  $h(a-x) = h(a+x) \quad (\forall)x \in R$ ; atunci  $h(0) = h(2a)$  sau

$$1 = 16a^4 + 2a + 1 \Leftrightarrow 2a(8a^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ sau } a = -\frac{1}{2}. \text{ Daca } a=0, \text{ rezulta } h(-1) = h(1), \text{ fals căci } h(1) \neq h(-1).$$

$$\text{Daca } a = -\frac{1}{2} \Rightarrow h\left(-\frac{1}{2} - x\right) = h\left(-\frac{1}{2} + x\right) \text{ adică } \left(x + \frac{1}{2}\right)^4 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^4 = 2x \quad (\forall)x \in R, \text{ fals căci } \left(\frac{3}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \neq 2$$

f) Fie  $x \in C$ ; atunci  $w = u \circ v; u, v \in A$  și cum  $(\exists)c \in R$  astfel încât

$$v(c-x) = v(c+x) \quad (\forall)x \in R \Rightarrow (u \circ v)(c-x) = (u \circ v)(c+x) \quad (\forall)x \in R \text{ deci } w(c-x) = w(c+x) \quad (\forall)x \in R$$

g)  $h(x) = x^4 + x + 1$ ; h evident  $h \in B, h \notin C$  (din f), deci  $B \setminus C \neq \emptyset$

#### SUBIECTUL IV

a)  $F(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt = 1 + \left(t + t^2 + t^3 + t^4\right) \Big|_0^x = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \quad (\forall)x \in R$

b)  $F'(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = f(x), \quad (\forall)x \in R$

c)  $(x-1)F(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1, \quad (\forall)x \in R$

d) Pentru  $x=1$ ,  $F(1) = 5 > 0$  iar pentru  $(\forall)x \in R, x \neq 1$  am  $F(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1} > 0$ ;

Concluzie:  $F(x) > 0 \quad (\forall)x \in R$

e)  $F''(x) = 2 + 6x + 12x^2 = 2(6x^2 + 3x + 1) > 0, \quad (\forall)x \in R$  (căci  $\Delta_x = 9 - 24 < 0$ ) deci F este convexă pe R

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nf(n)}{F(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n}{n^4 + n^3 + n^2 + n + 1} = 4$

g)  $f(x^3) = 1 \Leftrightarrow 4x^9 + 3x^6 + 2x^3 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3(4x^6 + 3x^3 + 2) = 0$  cu  $x=0$  soluție unică în R