

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
***Varianta ...035***

**Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările**

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze  $a + 2b$  dacă punctul  $M(a, b)$  aparține dreptei de ecuație  $2x + 4y - 5 = 0$ .
- (4p) b) Să se calculeze lungimea razei cercului de ecuație  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ .
- (4p) c) Să se determine cel mai mare element al mulțimii  $\left\{ \cos \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{2}, \cos \frac{2\pi}{3} \right\}$ .
- (4p) d) Să se dea un exemplu de număr complex nereal care are modulul  $\sqrt{10}$ .
- (2p) e) Să se calculeze produsul  $\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{2}$ .
- (2p) f) Să se calculeze partea reală a numărului  $\left( \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right)^3$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

- 1.
- (3p) a) Să se determine simetricul față de înmulțire al elementului  $\hat{7} \in \mathbf{Z}_8$ .
- (3p) b) Să se calculeze suma  $\hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7}$  în grupul  $(\mathbf{Z}_8, +)$ .
- (3p) c) Să se determine  $x \in \mathbf{Q}$  pentru care  $4^x = 8$ .
- (3p) d) Să se determine restul împărțirii polinomului  $f = X^3 - 2X + 3$  la polinomul  $g = X - 1$ .
- (3p) e) Să se calculeze în câte moduri se poate alcătui o echipă formată din 4 persoane dintr-un grup format din 5 persoane.
2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^{2007}$ .
- (3p) a) Să se determine  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se determine cel mai mare dintre numerele  $a = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  și  $b = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{f(x)}$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În  $M_2(\mathbf{R})$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (4p) a) Să se arate că  $\det(A) = \det(B)$ .
- (4p) b) Să se arate că  $\text{rang}(B) > \text{rang}(C)$ .
- (4p) c) Să se arate că există o singură matrice  $X \in M_2(\mathbf{R})$ , pentru care  $X \cdot A = C$ .
- (2p) d) Să se găsească două matrice diferite  $Y, Z \in M_2(\mathbf{R})$ ,  $Y, Z \neq O_2$  pentru care  $C \cdot Y = C \cdot Z = O_2$ .
- (2p) e) Să se arate că există cel puțin 2007 de perechi  $(m, n)$  de numere naturale pentru care  $A^m = B^n$ .
- (2p) f) Să se arate că matricea  $A$  este inversabilă și să se calculeze inversa ei.
- (2p) g) Să se determine toate numerele  $x, y, z \in \mathbf{R}$  astfel încât  $x \cdot A + y \cdot B + z \cdot C = O_2$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x \cdot \cos x - \sin x$  și  $g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ .
- (4p) b) Să se arate că  $f$  este strict descrescătoare pe intervalul  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- (4p) c) Să se determine  $g'(x)$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- (2p) d) Folosind eventual b) și c), să se arate că  $g$  este strict descrescătoare pe  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- (2p) e) Să se arate că  $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} < 1$ ,  $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx \geq \frac{2}{3}$ .

## Variantă 035

### SUBIECTUL I

- a)  $a + 2b = \frac{5}{2}$ .
- b) Ecuația cercului este  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ , deci raza este  $r = 1$ .
- c)  $\cos \frac{\pi}{3}$ .
- d)  $z = 3 - i$ .
- e)  $\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$ .
- f)  $-1$ .

### SUBIECTUL II

- 1.
- a)  $\hat{7} \cdot \hat{7} = \hat{1}$  în  $\mathbf{Z}_8$ , deci  $\hat{7}$  este elementul căutat.
- b)  $\hat{1}$ .
- c)  $x = \frac{3}{2}$ .
- d)  $f(1) = 2$ .
- e)  $C_5^4 = 5$ .
- 2.
- a)  $f'(x) = 2007x^{2006}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- b) Cum funcția  $f$  este strict crescătoare, atunci  $a > b$ .
- c) Cum  $f'(x) = 2007x^{2006} > 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , atunci funcția  $f$  este crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- d)  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2008}$ .
- e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2007}} \cdot \sin x = 0$ .

### SUBIECTUL III

- a)  $\det(A) = \det(B) = 1$ .
- b)  $\text{rang}(B) = 2 > 1 = \text{rang}(C)$ .

c) Fie  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Ecuația  $X \cdot A = C$  revine la egalitatea  $\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

care admite soluția  $a = 2$ ,  $b = -3$ ,  $c = d = 0$ . Rezultă  $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

d) Fie  $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Ecuația  $W \cdot Y = O_2$  implică sistemul  $\begin{cases} 2a+c=0 \\ 2b+d=0 \end{cases}$ . Atunci

$W = \begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}$ . Pentru  $a = b = 1$ , obținem  $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ , iar pentru  $a = b = 2$

avem  $Z = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ .

e) Fie  $D = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Se arată prin inducție matematică că  $D^n = \begin{pmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $n \geq 1$ . Atunci

$A^m = \begin{pmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , iar  $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Egalitatea  $A^m = B^n$  revine la ecuația  $2m = 3n$

pentru care orice pereche  $(3k, 2k)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  este soluție.

f) Cum  $\det(A) = 1$ , rezultă că matricea  $A$  este inversabilă și  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

g) Egalitatea  $xA + yB + zC = O_2$  implică  $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ , de unde rezultă  
 $x = y = z = 0$ .

#### SUBIECTUL IV

a)  $f'(x) = -x \sin x$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

b) Deoarece  $\sin x \geq 0$  pentru orice  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , rezultă că  $f'(x) \leq 0$  pentru  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Deci funcția  $f$  este descrescătoare pe  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

c)  $g'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

d) Avem  $g'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot f(x) < 0$  oricare ar fi  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Atunci  $g$  este strict

descrescătoare pe  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

e) Deoarece  $g$  este strict descrescătoare pe  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ , rezultă  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq g(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

Atunci  $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} < 1$ , oricare ar fi  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

$$f) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{5\pi - 12\sqrt{3}}{12}.$$

g) Deoarece  $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$  rezultă  $\frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ , adică  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx \geq \frac{2}{3}$ .