

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta033

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$, unde $A(3, 2, 1)$, $B(1, 2, 3)$.
- (4p) b) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.
- (4p) c) Să se determine partea reală a numărului complex $(1+i)^{10}$.
- (4p) d) Să se determine coordonatele punctului comun al dreptelor $x+y+3=0$ și $3x-y-1=0$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile $A(-1, 0)$, $B(2, 1)$, $C(3, -1)$.
- (2p) f) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $A(3\alpha, 4\alpha)$ să aparțină cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 25$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $100, x, 10$ (în această ordine) să fie în progresie aritmetică.
- (3p) b) Să se determine probabilitatea ca un element al mulțimii $\{1, 2, \dots, 9\}$ să verifice relația $n! < 2007$.
- (3p) c) Să se rezolve ecuația $2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$.
- (3p) d) Să se calculeze restul împărțirii polinomului $f = X^3$ la polinomul $g = X + 1$.
- (3p) e) Să se arate că $\log_2(\log_3 9)$ este un număr întreg.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(0)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.
- (3p) d) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = 1$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numărul real $\omega = 1 + \sqrt{2}$ și mulțimea $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$.

Se notează cu $\bar{\omega} = 1 - \sqrt{2}$ și $G = \{z \in H \mid \exists y \in H \text{ astfel încât } y \cdot z = 1\}$.

- (4p) a) Să se verifice că $0 \in H$, $1 \in H$, $\omega \in H$ și $\bar{\omega} \in H$.
- (4p) b) Să se verifice că $\omega^2 = 2\omega + 1$.
- (4p) c) Să se arate că, dacă $z, y \in H$, atunci $z + y \in H$ și $z \cdot y \in H$.
- (2p) d) Să se arate că $\omega \cdot (-\bar{\omega}) = 1$.
- (2p) e) Să se arate că $\omega \in G$.
- (2p) f) Să se arate că mulțimea G are cel puțin 2007 elemente.
- (2p) g) Să se arate că $\omega^{2007} \notin \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = e^x$ și $g(x) = \frac{1}{x}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și $g'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se calculeze $\int_1^2 f^2(x) dx$.
- (4p) c) Să se calculeze $\int_1^2 g^2(x) dx$.
- (2p) d) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției g .
- (2p) e) Să se arate că $t^2 e^{2x} - 2t \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall x > 0$.
- (2p) f) Integrând inegalitatea de la punctul e), să se arate că

$$t^2 \int_1^2 e^{2x} dx - 2t \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \geq 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$
- (2p) g) Să se arate că $\left(\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \right)^2 \leq \int_1^2 e^{2x} dx \cdot \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$.

VARIANTA 033

SUBIECTUL I

a) fie M mijlocul segmentului [AB]; atunci $x_M = 2$, $y_M = 2$, $z_M = 2$;

b) $\sin \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$;

c) $z = (1+i)^{10} = (1-1+2i)^{10} = 2^{10} \cdot i^{10} = -2^{10}$ ⇒ Real z = -2¹⁰;

d) Rezolvând sistemul $\begin{cases} x+y+3=0 \\ 3x-y-1=0 \end{cases}$ obțin $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}$;

e) Aria [ABC] = $\frac{1}{2} |\Delta|$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$ adică aria este $\frac{5}{2}$;

f) Punctul se află pe cerc $\Leftrightarrow 9\alpha^2 + 16\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 1$ sau $\alpha = -1$;

SUBIECTUL II

1.

a) Numerele 100, x, 10 sunt în progresie aritmetică dacă $x = \frac{100+10}{2} = 55$;

b) Inegalitatea este verificată de numerele de la 1 la 6 deci probabilitatea este $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$;

c) $2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$ și notând $2^x = y > 0$ obțin $y^2 - 2y - 8 = 0$; $\Delta_y = 4 + 32 = 36$;
 $y_1 = -2 < 0$ nu convine; $y_2 = 4 > 0$ convine $\Rightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$;

d) Restul este $f(-1) = -1$;

e) $\log_2(\log_3 9) = \log_2 2 = 1 \in Z$;

2.

a) $f(0) = e^0 - 0 = 1$;

b) $f'(x) = e^x - 1 \ (\forall)x \in R$;

c) $f'(x) = e^x - 1 > 0 \ (\forall)x > 0 \Rightarrow f$ e strict crescătoare pe $[0, \infty)$

d) $f(0) = 1 > 0$ și f strict crescătoare $\Rightarrow f(x) > 0 \ (\forall)x \in [0, 1]$. În plus f continuă pe $[0, 1]$, deci aria cerută este:

$$\int_0^1 f(x) dx = \left(e^x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2};$$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$ (am aplicat de două ori l'Hospital).

SUBIECTUL III

a) $0 = 0 + 0\sqrt{2}$; $1 = 1 + 0\sqrt{2}$; $\varpi = 1 + 1\sqrt{2}$ și $\bar{\varpi} = 1 + (-1)\sqrt{2}$ deci $0, 1, \varpi, \bar{\varpi} \in H$.

b) Se verifică prin calcul direct;

c) Fie $z = a + b\sqrt{2}$ și $y = c + d\sqrt{2}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Atunci $x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$, deci $z + y \in H$ și $z \cdot y = ac + 2bd + \sqrt{2}(ad + bc)$ deci $z \cdot y \in H$;

d) Se verifică prin calcul direct;

e) Rezultă din d) Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

- f) Deoarece $\varpi \in G$, rezultă $\varpi \cdot \varpi = \varpi^2 \in G$ și inductiv obținem că $\varpi^n \in G$, $(\forall)n \in N^*$. Atunci $\{\varpi, \varpi^2, \dots, \varpi^{2006}\} \subset G$ și $\varpi^i \neq \varpi^j$, $\forall i \neq j$. Deci mulțimea G conține cel puțin 2006 elemente.
- g) $\varpi^{2007} = (1 + \sqrt{2})^{2007} = C_{2007}^0 + C_{2007}^2 \cdot 2 + C_{2007}^4 \cdot 2^2 + \dots + C_{2007}^{2006} \cdot 2^{1003} + \sqrt{2}(C_{2007}^1 + C_{2007}^3 \cdot 2 + \dots + C_{2007}^{2007} \cdot 2^{1003}) = a + b\sqrt{2}$ și cum $b > 0$, deci $b \neq 0$, rezultă că $\varpi^{2007} \notin Q$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = e^x$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $(\forall)x > 0$;

b) $\int_1^2 f^2(x)dx = \int_1^2 e^{2x} dx = \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (e^4 - e^2) = \frac{e^2}{2} (e^2 - 1)$

c) $\int_1^2 g^2(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

d) Deoarece g continuă pe $(0, \infty)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$ rezultă că singura asymptotă verticală este $x = 0$;

e) $t^2 e^{2x} - 2t \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(t \cdot e^x - \frac{1}{x} \right)^2 \geq 0$ da, $(\forall)t \in R$, $(\forall)x > 0$;

f) Din e) am $t^2 e^{2x} - 2t \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(t \cdot e^x - \frac{1}{x} \right)^2 \geq 0$ $(\forall)t \in R$, $(\forall)x > 0 \Rightarrow \int_1^2 \left(t^2 e^{2x} - 2t \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx \geq 0 \Rightarrow$

$t^2 \int_1^2 e^{2x} dx - 2t \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \geq 0$, $(\forall)t \in R$;

g) Notând $A = \int_1^2 e^{2x} dx$, $B = -2 \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$ și $C = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$, evident $A > 0$ și folosind f) am $At^2 + Bt + C \geq 0$ $(\forall)t \in R$
 $\Leftrightarrow \Delta_t \leq 0 \Leftrightarrow B^2 - 4AC \leq 0 \Leftrightarrow B^2 \leq 4BC$ adică tocmai inegalitatea cerută.