

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
***Varianta ....032***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**| La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine conjugatul numărului complex  $z = i^{10} - i^{11}$ .
- (4p) b) Să se determine  $a \in \mathbf{R}$  dacă  $1 + (a \cdot i)^2 = 0$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2}$ .
- (4p) d) Să se calculeze  $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ$ .
- (2p) e) Să se determine  $c, d \in \mathbf{R}$  dacă punctele  $A(c, 1), B(2, d)$  aparțin dreptei de ecuație  $2x - y - 3 = 0$ .
- (2p) f) Să se dea un exemplu de punct  $M(a, b)$  care aparțin parabolei de ecuație  $y^2 = 4x$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se arate că  $(\log_2 3 - \log_2 6) \in \mathbf{Z}$ .
- (3p) b) Să se calculeze determinantul  $\begin{vmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} \end{vmatrix}$ .
- (3p) c) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului  $f = X^3 + 2X^2 - 2X - 1$ .
- (3p) d) Dacă  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x - 3$ ,  $g(x) = x^2 - 3$  să se calculeze  $f(g(\sqrt{3}))$ .
- (3p) e) Să se determine cel mai mare număr întreg  $m$  pentru care  $3^m < 30$ .

2.

- (3p) a) Să se arate că sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu termenul general  $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$  este strict crescător.
- (3p) b) Să se dea un exemplu de funcții diferite  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  pentru care  $f'(1) = g'(1)$ .
- (3p) c) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$ .
- (3p) e) Să se determine cel mai mic număr natural  $n$  pentru care  $\int_2^3 x \, dx \leq n$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Pe mulțimea  $\mathbf{C}$  a numerelor complexe se definește legea de compoziție "◦" prin

$$z \circ u = z \cdot u + i \cdot (z + u) - 1 - i, \quad \forall z, u \in \mathbf{C}.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $(1 - i) \circ i$ .
- (4p) b) Să se arate că există  $e \in \mathbf{C}$  astfel încât  $z \circ e = e \circ z = z$ ,  $\forall z \in \mathbf{C}$ .
- (4p) c) Să se verifice că  $z \circ u = (z + i)(u + i) - i$ ,  $\forall z, u \in \mathbf{C}$ .
- (2p) d) Să se determine  $z \in \mathbf{C}$  pentru care  $z \circ (1 - i) = 3 + i$ .
- (2p) e) Să se arate că există  $f \in \mathbf{C}$  astfel încât  $z \circ f = f \circ z = f$ ,  $\forall z \in \mathbf{C}$ .
- (2p) f) Să se arate că  $(z \circ u) \circ w = z \circ (u \circ w)$ ,  $\forall z, u, w \in \mathbf{C}$ .
- (2p) g) Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că

$$\underbrace{z \circ z \circ \dots \circ z}_{\text{de } n \text{ ori}} = (z + i)^n - i, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră  $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$  și pentru fiecare  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  se definește funcția

$$f_k : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_k(x) = \frac{k}{n} \cdot x^n - x^k.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $f_1'(x)$ ,  $x \in [0, \infty)$ .
  - (4p) b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(1)$ .
  - (4p) c) Să se calculeze  $\int_0^1 f_1(x) dx$ .
  - (2p) d) Să se arate că  $x = 1$  este punct de minim local pentru funcția  $f_k$ ,  $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$ .
  - (2p) e) Să se arate că  $\frac{k}{n} \cdot x^n \geq x^k + \frac{k}{n} - 1$ ,  $\forall x \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$  și  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
  - (2p) f) Să se arate că  $\int_0^1 f_k(x) dx \geq \frac{k}{n} - 1$ ,  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
  - (2p) g) Să se arate că pentru orice  $x \geq 0$  și orice  $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$  este adevarată inegalitatea
- $$x^n + 1 \geq \frac{2}{n+1} (x^n + x^{n-1} + \dots + 1).$$

## Varianta 032

### SUBIECTUL I

- a)  $\bar{z} = -1 - i$ .
- b)  $a \in \{-1, 1\}$ .
- c)  $\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$ .
- d)  $\tg 15^\circ \cdot \ctg 15^\circ = 1$ .
- e) Condiția ca punctele  $A$ ,  $B$  să fie situate pe dreapta  $2x - y - 3 = 0$  implică sistemul  

$$\begin{cases} 2c - 4 = 0 \\ 1 - d = 0 \end{cases}$$
 cu soluția  $c = 2$  și  $d = 1$ .
- f) Se poate considera punctul  $M(1, 2)$ .

### SUBIECTUL II

1.

- a)  $\log_2 3 - \log_2 6 = \log_2 \frac{3}{6} = -1 \in \mathbf{Z}$ .
- b)  $\begin{vmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} \end{vmatrix} = 0$ .
- c) Polinomul  $f = X^3 + 2X^2 - 2X - 1$  are suma rădăcinilor  $-2$ .
- d)  $f(g(\sqrt{3})) = f(0) = -3$ .
- e)  $m = 3$ .

2.

- a) Cum  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ , rezultă că sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este strict crescător.
- b) Se pot considera funcțiile  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2$  și  $g(x) = x^2 + 1$ , pentru care  $f'(1) = g'(1) = 2$ .
- c) Funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbf{R}$  și  $f'(x) = 3x^2 - 3$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . Cum  $f'(x) > 0$  pentru  $x \in \mathbf{R} \setminus [-1, 1]$  și  $f'(x) < 0$  pentru  $x \in [-1, 1]$ , rezultă că  $x = -1$  și  $x = 1$  sunt puncte de extrem. Deci  $f$  are două puncte de extrem.
- d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{6}$ .

e) Avem  $\int_2^3 x dx = \frac{5}{2}$ , deci  $n = 3$ .

### SUBIECTUL III

a)  $(1-i) \circ i = i$ .

b) Se arată că legea este comutativă, deci este suficient să rezolvăm ecuația  $z \circ e = z$ . Această egalitate revine la  $e(z+i) = (z+i)(1-i)$ ,  $\forall z \in \mathbf{C}$ , ceea ce implică  $e = 1 - i$ .

c) Calcul direct.

d) Folosind b) rezultă  $z = 3 + i$ .

e) Egalitatea  $z \circ f = f$  implică, folosind c),  $(z+i)(f+i) = f+i$ ,  $\forall z \in \mathbf{C}$ . Atunci  $f+i = 0$ , deci  $f = -i$ .

f) Folosind c) avem  $(z \circ u) \circ w = (z+i)(u+i)(w+i) - 1 = z \circ (u \circ w)$ ,  $\forall z, u, w \in \mathbf{C}$ .

g) Pentru  $n = 1$ , avem egalitatea  $z = (z+i)^1 - i$ . Presupunem că

$$\underbrace{z \circ z \circ \dots \circ z}_{\text{de } k \text{ ori}} = (z+i)^k - i \text{ și demonstrăm că } \underbrace{z \circ z \circ \dots \circ z}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} = (z+i)^{k+1} - i. \text{ Avem}$$

$$\underbrace{z \circ z \circ \dots \circ z}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} = ((z+i)^k \circ z) = ((z+i)^k - i + i)(z+i) - i = (z+i)^{k+1} - i. \text{ Atunci}$$

$$\underbrace{z \circ z \circ \dots \circ z}_{\text{de } n \text{ ori}} = (z+i)^n - i \text{ pentru orice } n \in \mathbf{N}^*, \forall z \in \mathbf{C}$$

### SUBIECTUL IV

a)  $f'_1(x) = x^{n-1} - 1$ ,  $x \geq 0$ .

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} - 1 \right) = -1$ .

c)  $\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{x^n}{n} - x \right) dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2}$ .

d) Funcția  $f_k$  este continuă și  $f'_k(x) = k(x^{n-1} - x^{k-1})$ ,  $x \geq 0$ . Avem  $f'(x) < 0$  pentru  $x \in (0, 1)$  și  $f'(x) > 0$  pentru  $x > 1$ . Deci  $x=1$  este puncte de extrem (minim) local pentru funcția  $f$ .

e) Din d) rezultă  $f_k(x) \geq f(1) = \frac{k}{n} - 1$  oricare ar fi  $x \geq 0$ ,  $n \geq 2$ . După înlocuire se

obține  $\frac{k}{n} \cdot x^n \geq x^k + \frac{k}{n} - 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $n \geq 2$ ,  $k \leq n-1$ . Pentru  $k=n$  inegalitatea devine

$$x^n \geq x^n, \quad x \geq 0.$$

f) Deoarece  $f_k(x) \geq f(1) = \frac{k}{n} - 1$  oricare ar fi  $x \geq 0$ ,  $n \geq 2$  rezultă

$$\int_0^1 f_k(x) dx \geq \int_0^1 \left( \frac{k}{n} - 1 \right) dx = \frac{k}{n} - 1.$$

g) Folosind inegalitatea de la e), avem  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} x^n \geq \sum_{k=1}^n x^k + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} - n$ . Dacă se

efectuează sumele, se obține  $\frac{n+1}{2} x^n \geq \frac{n+1}{2} - n + \sum_{k=1}^n x^k$ . Se împarte inegalitatea cu

$$\frac{2}{n+1}$$
 și rezultă  $x^n + 1 \geq \frac{2}{n+1} (x^n + x^{n-1} + \dots + 1)$ ,  $x \geq 0$ ,  $n \geq 2$ .