

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta031

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\sqrt{15} - i$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(3, 12)$ și $C(4, 14)$.
- (4p) c) Să se calculeze suma de numere complexe $S = i + 2i^3 + 3i^5 + 4i^7$.
- (4p) d) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3, 12)$ și $C(4, 14)$ să aparțină dreptei de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(3, 12)$, $B(2, 2)$ și $C(4, 14)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe

$$\frac{1}{1-i} = a + bi.$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze elementul $\hat{4}^{2007}$ în (\mathbf{Z}_8, \cdot) .
- (3p) b) Să se calculeze $C_{11}^3 - C_{11}^8 + C_9^9$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_7 x = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $6^x = 36^{x-1}$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $n^n < 30$.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^7 + 6x^5 - 7$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9\sqrt[n]{n} + 1}{5\sqrt[n]{n} + 7}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 031

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și

submulțimea $G = \{X(a) \mid X(a) = aA + I_2, a \in \mathbf{R}\}$.

- (4p) a) Să se verifice că $I_2 \in G$.
- (4p) b) Să se arate că $A^2 = 3A$.
- (4p) c) Să se verifice că $X(0) \cdot X(a) = X(a) \cdot X(0) = X(a)$, $\forall a \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(3ab + a + b)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.
- (2p) f) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- (2p) g) Să se determine numărul real t pentru care

$$X\left(\frac{-100}{3}\right) \cdot X\left(\frac{-99}{3}\right) \cdot \dots \cdot X\left(\frac{99}{3}\right) \cdot X\left(\frac{100}{3}\right) = X(t).$$

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1+x}{1+x+x^2}$.

- (4p) a) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se calculeze $f(-2)$, $f(0)$, $f'(-2)$ și $f'(0)$.
- (2p) d) Să se arate că $-\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$, $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Dacă $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este o primitivă a funcției f , să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{\ln x}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_0^x f(t)dt - \ln x \right)$.

Varianta 031

SUBIECTUL I

- a) $|\sqrt{15} - i| = 4$.
- b) $AC = \sqrt{5}$.
- c) $S = -2i$.
- d) Condiția ca punctele A, C să fie situate pe dreapta $x + ay + b = 0$ implică sistemul
 $\begin{cases} 3 + 12a + b = 0 \\ 4 + 14a + b = 0 \end{cases}$ cu soluția $a = -\frac{1}{2}$ și $b = 3$.
- e) 4.
- f) $a = \frac{1}{2}$ și $b = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II

- 1.
- a) $\hat{4}^{2007} = (\hat{4}^2)^{1003} \cdot \hat{4} = \hat{0}$.
- b) $C_{11}^3 - C_{11}^8 + C_9^9 = 1$.
- c) $x = 1$.
- d) $x = 2$.
- e) Doar numerele 1,2,3 verifică inegalitatea $n^n < 30$. Probabilitatea este $\frac{3}{5}$.
- 2.
- a) $f'(x) = 7x^6 + 30x^4, x \in \mathbf{R}$.
- b) $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{47}{8}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$.
- d) Cum $f'(x) \geq 0, x \in \mathbf{R}$, rezultă că f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9\sqrt[n]{n} + 1}{5\sqrt[n]{n} + 7} = \frac{9}{5}$.

SUBIECTUL III

- a) Pentru $a = 0$ avem $X(0) = 0 \cdot A + I_2 = I_2 \in G$.
- b) Prin calcul direct se obține $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot A$.

- c) $X(a) \cdot X(0) = X(a) \cdot I_2 = X(a)$ și $X(0) \cdot X(a) = I_2 \cdot X(a) = X(a)$
d) $X(a) \cdot X(b) = (a \cdot A + I_2) \cdot (b \cdot A + I_2) = abA^2 + (a+b)A + I_2 = X(3ab + a + b)$.
e) $\det(A) = 0$ și $\text{rang}(A) = 1$.

f) $\det(X(a)) = \begin{vmatrix} a+1 & a \\ 2a & 2a+1 \end{vmatrix} = 3a+1$.

g) Avem $X(a) \cdot X(b) = X\left(3\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(b + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\right)$ pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, de unde se

observă că $X(a) \cdot X\left(-\frac{1}{3}\right) = X\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot X(a) = X\left(-\frac{1}{3}\right)$. Atunci

$$\left[X\left(\frac{-100}{3}\right) \cdot X\left(\frac{-99}{3}\right) \cdots X\left(\frac{-2}{3}\right) \right] \cdot X\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left[X(0) \cdot X\left(\frac{1}{3}\right) \cdots X\left(\frac{100}{3}\right) \right] = X\left(-\frac{1}{3}\right)$$

deci $t = -\frac{1}{3}$.

SUBIECTUL IV

a) Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, rezultă că dreapta $y = 0$ este asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f .

b) $f'(x) = -\frac{x^2 + 2x}{(1+x+x^2)^2}, x \in \mathbf{R}$.

c) $f(-2) = -\frac{1}{3}$, $f(0) = 1$, $f'(-2) = 0$ și $f'(0) = 0$.

d) Soluția 1. Avem tabelul de variație

x	$-\infty$	-2	0	∞
$f'(x)$	- - - - -	0	++ + 0	- - - -
$f(x)$	0	\searrow $-\frac{1}{3}$	\nearrow 1	\searrow 0

Rezultă $-\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Soluția 2. Avem $1+x+x^2 > 0$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. Inegalitatea $f(x) \leq 1$ revine la

$0 \leq x^2$, care are loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Inegalitatea $-\frac{1}{3} \leq f(x)$ revine la inegalitatea

$(x+2)^2 \geq 0$ care are loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Deci $-\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

e) Se aplică regula lui l'Hospital și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} = 1$.

f)

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) \Big|_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 \\ = \frac{\ln 3}{2} + \frac{\pi \sqrt{3}}{18}$$

$$\text{g)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_0^x f(t) dt - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi \sqrt{3}}{18} - \ln x \right) \\ = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi \sqrt{3}}{18} = \frac{\pi \sqrt{3}}{6} - \frac{\pi \sqrt{3}}{18} = \frac{\pi \sqrt{3}}{9}.$$