

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
***Varianta ....030***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

Se consideră mulțimea  $M = \{\sin \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{5}, \sin \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{2}, \sin \pi\}$ .

- (4p) a) Să se determine cel mai mare element al mulțimii  $M$ .
- (4p) b) Să se scrie ecuația unei drepte perpendiculare pe dreapta de ecuație  $y = \sin \frac{\pi}{6}$ .
- (4p) c) Să se determine  $x \in M$  pentru care  $2x = \sqrt{2}$ .
- (4p) d) Să se calculeze produsul elementelor mulțimii  $M$ .
- (2p) e) Să se calculeze modulul numărului complex  $z = \cos \frac{\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{\pi}{5}$ .
- (2p) f) Să se găsească două numere  $a, b \in M$  pentru care  $a + b \in \mathbb{Q}$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1. Se consideră pe  $\mathbf{R}$  legea de compoziție "⊥" definită prin

$$x \perp y = 4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

- (3p) a) Să se calculeze  $2 \perp \frac{3}{4}$ .
- (3p) b) Să se determine elementul neutru al legii "⊥".
- (3p) c) Să se determine  $a \in \mathbf{R}$  pentru care  $x \perp y = (2x - 1) \cdot (2y - 1) + a$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ .
- (3p) d) Să se determine  $x \in \mathbf{R}$  pentru care  $(2^x) \perp (4^x) = \frac{1}{2}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\log_2 8$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 3}{n^2 + 1} \right)^{\frac{1}{n}}$ .
- (3p) c) Să se determine câte puncte de extrem local are funcția considerată.
- (3p) d) Să se determine ecuația asimptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

Descarcat de pe site-ul [ebacalaureat.ro](http://ebacalaureat.ro)

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

**Varianta 030**

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Pentru o matrice  $A = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$  se notează cu  $A^* = \begin{pmatrix} q & -n \\ -p & m \end{pmatrix}$  matricea sa reciprocă (sau adjunctă). Se consideră matricele  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  și  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $\det(B)$ .
- (4p) b) Să se determine  $r \in \mathbf{R}$  pentru care  $B \cdot B^* = r \cdot E$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $B^2$ .
- (2p) d) Să se arate că  $B^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3k \cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) e) Să se arate că  $\det(E + \det(E) \cdot E^*) = 4$ .
- (2p) f) Să se determine numerele întregi  $s$  pentru care  $\det(B + s \cdot B^*) = 4$ .
- (2p) g) Să se determine  $u, v \in \mathbf{R}$  astfel încât  $u \cdot B + v \cdot B^* = 4E$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = \frac{x-1}{x}, \quad g(x) = \ln x, \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (4p) b) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției  $f$ .
- (4p) c) Să se arate că  $g$  este concavă pe  $(0, \infty)$ .
- (2p) d) Să se arate că există  $p \in \mathbf{R}$  astfel încât  $f(x) + g'(x) = p$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ .
- (2p) e) Să se arate că funcția  $h$  are un singur punct de extrem.
- (2p) f) Să se arate că  $1 + x \cdot \ln x \geq x$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\int_1^2 g(x)dx \geq 1 - \ln 2$ .

## Varianta 030

### SUBIECTUL I

- a) 1; b)  $x = k$ ,  $k$  constantă reală; c)  $x = \sin \frac{\pi}{4} \in M$ ; d) 0; e)  $|z| = 1$ ;  
 f) oricare două elemente din mulțimea  $\left\{ \sin \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{2}, \sin \pi \right\}$ .

### SUBIECTUL II

- 1.
- a) 2; b)  $e = \frac{3}{4}$ . c)  $a = \frac{1}{2}$ . d)  $t \in \left\{ -1, -\frac{1}{2} \right\}$ . e)  $\log_2 8 = 3$ .
- 2.
- a)  $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ;
- b) 1;
- c) Funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbf{R}$ . Avem  $f'(x) > 0$  pentru  $x < 0$  și  $f'(x) < 0$  pentru  $x > 0$ , deci  $x = 0$  este unicul punct de extrem (maxim).
- d)  $y = 1$  este asimptota orizontală spre  $+\infty$ ;
- e)  $1 + \frac{\pi}{2}$ .

### SUBIECTUL III

- a)  $\det(B) = 4$ .
- b)  $r = 4$ .
- c)  $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .
- d) Se folosește principiul inducției matematice.
- e) Avem  $E + \det(E) \cdot E^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Atunci  $\det(E + \det(E) \cdot E^*) = 4$ .
- f)  $s = -1$ ;
- g)  $u = v = 1$

### SUBIECTUL IV

- a)  $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- b)  $x = 0$  este singura asimptotă verticală la graficul funcției  $f$ .

- c)  $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ,  $x \in (0, \infty)$ , rezultă că  $g$  este concavă pe  $(0, \infty)$ .
- d)  $f(x) + g'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1 = p$  pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .
- e) Avem  $h'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, \infty)$ . Ecuația  $h'(x) = 0$  are soluția  $x = 1$  și  $h'(x) > 0$  pentru  $x \in (0, 1)$ ,  $h'(x) < 0$  pentru  $x \in (1, \infty)$ . Rezultă că  $x = 1$  este unicul punct de extrem al funcției  $h$ .
- f)  $x = 1$  este punct de maxim pentru funcția  $h$  atunci  $h(x) \leq h(1) = 0$  pentru orice  $x \in (0, \infty)$ . Această inegalitate implică  $1 + x \cdot \ln x \geq x$  pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .
- g) Deoarece  $h(x) \leq 0$  pentru orice  $x \in (0, \infty)$ , rezultă  $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ . Atunci
- $$\int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 \ln x dx \geq \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = 1 - \ln 2.$$