

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta029

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate Oxy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(5,2)$, $C(1,5)$, $D(a,b)$.

- (4p) a) Să se calculeze lungimea segmentului $[BC]$.
- (4p) b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
- (4p) c) Să se calculeze distanța de la A la dreapta BC .
- (4p) d) Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât $x + my + n = 0$ să reprezinte ecuația dreptei AC .
- (2p) e) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $ABDC$ să fie dreptunghi.
- (2p) f) Dacă $\sin x = \frac{1}{2}$ să se determine $\cos^2 x$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $5^{1+x^2} = 25^x$.
- (3p) b) Să se calculeze $C_5^3 - C_5^2 + C_5^5$.
- (3p) c) Să se arate că numărul $\log_6 2 + \log_6 3$ este natural.
- (3p) d) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -2x + 7$. Să se calculeze $(f \circ f)(3)$.
- (3p) e) Să se calculeze matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2007}$.

2. Se consideră funcția $f : (-2, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + \frac{2}{x+2}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (-2, \infty)$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) d) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nf(n)}{n^2 + 2007}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 029

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = (X+i)^{20} + (X-i)^{20}$ care are forma

algebrică $f = a_{20}X^{20} + a_{19}X^{19} + \dots + a_1X + a_0$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(0)$.
- (4p) b) Să se determine a_{20} și a_0 .
- (4p) c) Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
- (2p) d) Să se arate că $f(i)$ este număr real.
- (2p) e) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X - i$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $z \in \mathbf{C}$ este o rădăcină a lui f , atunci $|z+i| = |z-i|$.
- (2p) g) Să se arate că polinomul f are numai rădăcini reale.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x+2)^{2006} - x^{2006}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că $f(-1-x) + f(-1+x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (2p) d) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $f(x) = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze $\int_{-3}^1 f(x)dx$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (2p) g) Să se arate că f este concavă pe $(-\infty, -1]$ și convexă pe $[-1, \infty)$.

VARIANTA 029

SUBIECTUL I

- a) $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$;
- b) $AC = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ $AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ și cum $AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow ABC$ dreptunghic în A
- c) Fie $h = d(A, BC)$; atunci $\sigma[ABC] = \frac{BC \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot 5}{5} = 2$;
- d) Formez sistemul $\begin{cases} 1+3m+n=0 \\ 5+m+n=0 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} m=2 \\ n=-7 \end{cases}$
- e) Paralelogramul cu un unghi drept este dreptunghi, deci este suficient $BD = AC$ și $AB = CD$; se obține sistemul $\begin{cases} (a-2)^2 + (b-5)^2 = 20 \\ (a-5)^2 + (b-1)^2 = 5 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} a = \frac{32}{5} \\ b = \frac{29}{5} \end{cases}$
- f) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

SUBIECTUL II

1.

- a) $5^{1+x^2} = 25^x \Leftrightarrow 5^{1+x^2} = 5^{2x} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- b) $C_5^3 - C_5^2 + C_5^5 = C_5^3 - C_5^3 + 1 = 1$
- c) $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2 \cdot 3) = \log_6 6 = 1 \in N$
- d) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -2f(x) + 7 = 4x - 14 + 7 = 4x - 7$ deci $(f \circ f)(3) = 5$;
- e) Notăm $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și evident $A^{2007} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.

- a) $f'(x) = 2 \cdot \frac{2}{(x+2)^2}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9}$;
- c) $\int_0^1 f(x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2 \ln(x+2) \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 2 \ln 3 - 2 \ln 2 = \frac{1}{2} + 2 \ln \frac{3}{2}$
- d) $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$; $n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = 0$, deci dreapta $y = x$ este asimptotă oblică către $+\infty$;
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nf(n)}{n^2 + 2007} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \frac{2n}{n+2}}{n^2 + 2007} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 2n}{(n+2)(n^2 + 2007)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{2007}{n^2}\right)} = 1$

SUBIECTUL III

- a) $f(0) = i^{20} + (-i)^{20} = 2$ pentru că $i^4 = 1$;
- b) $a_{20} = 1+i$, iar $a_0 = 2$
- c) Se știe că suma cerută este $f(1)$ adică $(1+i)^{20} + (1-i)^{20} = 2^{20} \cdot i^{20} + (-2)^{20} i^{20} = 2^{21}$.
Descarcă de pe site-ul ebookalauromat.ro
- d) $f(i) = (2i)^{20} = 2^{20} \in R$
- e) Restul împărțirii este $f(i) = 2^{20}$

- f) Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $f(z) = 0 \Rightarrow (z+1)^{20} + (z-i)^{20} = 0 \Rightarrow (|z+i|)^{20} = (|z-i|)^{20} \Rightarrow |z+i| = |z-i|$;
 g) Fie $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ rădăcină a lui f ; folosind f) obțin $|z+i| = |z-i| \Rightarrow |a+(b+1)i| = |a+(b-1)i| \Rightarrow a^2 + (b+1)^2 = a^2 + (b-1)^2 \Rightarrow b=0$ adică $z = a \in \mathbb{R}$;

SUBIECTUL IV

- a) $f'(x) = 2006(x+2)^{2005} - 2006x^{2005}$ ($\forall x \in \mathbb{R} = 2006 \sum_{k=1}^{2005} x^{2005-k} \cdot 2^k \cdot C_{2005}^k$);
 b) $f(-1-x) + f(-1+x) = (1-x)^{2006} - (1+x)^{2006} + (1+x)^{2006} - (-1+x)^{2006} = 0$, ($\forall x \in \mathbb{R}$);
 c) Cum $f'(x) = 2006((x+2)^{2005} - x^{2005}) > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
 d) Deoarece f este strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ injectivă \Rightarrow ecuația $f(x) = 0$ are cel mult o soluție și cum $f(-1) = 0$ rezultă $x = -1$ soluție unică;
 e) $\int_{-3}^1 f(x) dx = \int_{-3}^1 ((x+2)^{2006} - x^{2006}) dx = \left(\frac{(x+2)^{2007}}{2007} - \frac{x^{2007}}{2007} \right) \Big|_{-3}^1 = 0$
 f) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} ((x+2)^{2006} - x^{2006}) = (C_{2006}^1 \cdot 2)(+\infty) = +\infty$;
 g) $f''(x) = 2006 \cdot 2005[(x+2)^{2004} - x^{2004}]$, am $f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x+2)^{2004} > x^{2004} \Leftrightarrow (x+2)^2 > x^2 \Leftrightarrow 4(x+1) > 0 \Leftrightarrow x > -1$ Deci f este convexă pe $[-1, \infty]$ și concavă pe $(-\infty, -1]$