

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
*Varianta ....027*

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

În sistemul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 2)$ ,  $B(1, a)$ , cu  $a \in \mathbb{R}$ .

- (4p) a) Să se determine lungimea segmentului  $[OA]$ .
- (4p) b) Să se determine ecuația mediatoarei segmentului  $[OA]$ .
- (4p) c) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 2$ , pentru care  $OA = OB$ .
- (4p) d) Să se determine ecuația cercului de centru  $O$  și rază  $OA$ .
- (2p) e) Să se calculeze produsul de numere complexe  $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5 \cdot i^6 \cdot i^7$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\arctg(\cos 0)$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se determine probabilitatea ca un element  $n$  al mulțimii  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $2^n \leq n^2$ .
- (3p) b) Să se determine trei numere în progresie aritmetică strict crescătoare, dacă suma lor este 9 și produsul lor este 15.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea  $(0, \infty) - \{1\}$  ecuația  $\log_x 4 = 2$ .
- (3p) d) Să se rezolve ecuația  $\sqrt{x+2} = x$ ,  $x \in [0, \infty)$ .
- (3p) e) Să se determine valoarea minimă a funcției  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ .

2. Se consideră funcția  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x > 1$ .
- (3p) b) Să se demonstreze că  $f$  este strict descrescătoare pe intervalul  $(1, \infty)$ .
- (3p) c) Să se determine ecuația asymptotei spre  $\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (3p) d) Să se arate că  $f(x) - \frac{2}{x-1} = 1$ ,  $\forall x > 1$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_2^3 f(x) dx$ .

Descarcat de pe site-ul [ebacalaureat.ro](http://ebacalaureat.ro)

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

**Varianta 027**

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea  $M_2(\mathbf{Q})$  se consideră submulțimea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a^2 - 3b^2 = 1, a, b \in \mathbf{Q} \right\}$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$
- (4p) b) Să se arate că dacă  $A, B \in G$ , atunci  $AB \in G$ .
- (4p) c) Să se arate că dacă  $X \in G$ ,  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$ , atunci  $X$  este matrice inversabilă.
- (2p) d) Să se arate că dacă  $X \in G$ ,  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$ , atunci  $X^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix}$ .
- (2p) e) Să se găsească o matrice  $A \in G$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$  cu  $b \neq 0$ .
- (2p) f) Să se arate că dacă  $B \in G$ ,  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$  cu  $a > 0, b > 0$ , atunci  $B^n \neq I_2$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) g) Să se arate că mulțimea  $G$  are cel puțin 2007 elemente.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \arctg x$ ,  $g(x) = \arctg x - x$  și se

definește sirul  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  prin  $a_0 = 1$  și  $a_{n+1} = f(a_n)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$  și  $g'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se arate că funcția  $g$  este strict descrescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (2p) d) Să se arate că  $g(x) = 0$  dacă și numai dacă  $x = 0$ .
- (2p) e) Să se arate că sirul  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  este strict descrescător și mărginit.
- (2p) f) Să se determine ecuația asymptotei spre  $\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (2p) g) Să se arate că  $0 < \int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}$ .

## Varianta 027

### SUBIECTUL I

- a)  $\sqrt{5}$ ; b)  $2x + 4y - 5 = 0$ ; c)  $a = -2$ ; d)  $x^2 + y^2 = 5$ . e) 1; f)  $\frac{\pi}{4}$ .

### SUBIECTUL II

1.

- a)  $p = \frac{1}{2}$ ; b) 1,3,5; c)  $x = 2$ ; d)  $x = 2$ ; e)  $f_{\min} = -4$ .

2.

a)  $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}, x > 1$ .

b) Cum  $f$  este continuă și  $f'(x) < 0$  oricare ar fi  $x > 1$ , avem că  $f$  este descrescătoare pe  $(1, \infty)$ .

c)  $y = 1$  asimptotă orizontală către  $\infty$ .

d) Calcul direct.

e)  $\int_2^3 f(x) dx = 1 + 2 \ln 2$ .

### SUBIECTUL III

a) Pentru  $a = 1$  și  $b = 0$  are loc egalitatea  $a^2 - 3b^2 = 1$ , deci  $I_2 \in G$ .

b) calcul direct;

c)  $\det(X) = a^2 - 3b^2$  și cum  $X \in G$  rezultă că  $\det(X) = 1$ , deci matricea  $X$  este inversabilă.

d) Se verifică că  $X \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} a^2 - 3b^2 & 0 \\ 0 & a^2 - 3b^2 \end{pmatrix}$  și cum  $X \in G$ , rezultă  $X \cdot X^{-1} = I_2$ .

e) Se poate considera matricea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in G$ .

f) Dacă  $B \in G$ , atunci există şirurile cu termeni pozitivi  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(b_n)_{n \geq 1}$  astfel încât

$B^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 3b_n & a_n \end{pmatrix}$ , unde  $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ ,  $n \geq 1$ . Egalitatea  $B^n = I_2$  implică

$a \cdot b_{n-1} + b \cdot a_{n-1} = 0$ , de unde rezultă  $a_{n-1} = b_{n-1} = 0$ , dar atunci  $a_{n-1}^2 - 3b_{n-1}^2 = 0 \neq 1$ , contradicție. Deci  $B^n \neq I_2$ .

g) Avem că  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in G$  și  $A^n \in G, n \geq 1$ , unde  $A^n \neq A^p$  oricare ar fi  $n \geq 1, p \geq 1$ ,  $n \neq p$ . Deci în  $G$  există o infinitate de elemente.

#### SUBIECTUL IV

a)  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbf{R}$  și  $g'(x) = -\frac{x^2}{1+x^2}, x \in \mathbf{R}$ .

b) Funcția  $f$  este continuă și  $f'(x) > 0$  oricare ar fi  $x \in \mathbf{R}$ , deci  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .

c) Funcția  $g$  este continuă și  $g'(x) < 0$  oricare ar fi  $x \in \mathbf{R}$ , deci  $g$  este strict descrescătoare pe  $\mathbf{R}$ .

d) Deoarece funcția  $g$  este continuă și strict descrescătoare pe  $\mathbf{R}$ , atunci  $g$  este injectivă, deci ecuația  $g(x) = 0$  are soluție unică. Cum  $g(0) = 0$ , rezultă  $g(x) = 0$  dacă și numai dacă  $x = 0$ .

e) Din  $a_{n+1} = \operatorname{arctg}(a_n)$  și  $a_0 = 1$  rezultă  $a_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  oricare ar fi  $n \geq 1$ , deci sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este mărginit. Avem  $a_{n+1} - a_n = g(a_n), n \geq 1$ . Dar funcția  $g$  strict descrescătoare pe  $\mathbf{R}$ , deci  $g(x) < g(0) = 0$  oricare ar fi  $x > 0$ . Atunci  $a_{n+1} - a_n = g(a_n) < 0$  pentru orice  $n \geq 1$ , deci sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este strict descrescător.

f)  $y = \frac{\pi}{2}$  este asimptota orizontală la graficul funcției  $f$ .

g) Deoarece  $f(x) > 0$  oricare ar fi  $x > 0$ , rezultă  $0 < \int_0^1 f(x) dx$ . Din  $g(x) < 0$  oricare ar fi  $x > 0$ , rezultă  $f(x) < x$  pentru  $x > 0$ . Atunci  $\int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ .