

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....025***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze aria triunghiului cu lungimile laturilor 12, 5 și 13.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $D(1, -2)$  la punctul  $E(0, 1)$ .
- (4p) c) Să se calculeze modulul numărului complex  $z = -1 - 4i$ .
- (4p) d) Să se arate că punctele  $L(1, 2)$ ,  $M(0, -1)$  și  $N(2, 5)$  sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze perimetru pătratului cu aria 100.
- (2p) f) Să se calculeze  $\cos x$ , dacă  $\sin x = \frac{1}{4}$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se determine restul împărțirii polinomului  $f = 2X^3 - 4X^2 + 5X - 1$  la polinomul  $X + 1$ .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  să verifice relația  $2^x \leq 10$ .
- (3p) c) Dacă funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x - 2$  are inversa  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , să se calculeze  $g(0)$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale pozitive ecuația  $\log_2(3x + 5) = 3$ .
- (3p) e) Să se calculeze suma cuburilor rădăcinilor polinomului  $f = X^3 + X$ .
- 2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x - 2007$ .
  - (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
  - (3p) b) Să se arate că  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
  - (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$ .
  - (3p) d) Să se rezolve în  $\mathbf{R}$ , ecuația  $f'(x) = 4$ .
  - (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

Descarcat de pe site-ul [ebacalaureat.ro](http://ebacalaureat.ro)

**SUBIECTUL III ( 20p )**

- a)** Să se verifice identitatea

$$(4p) xy - \frac{1}{xy} - \left( x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) = \frac{(x-1)(y-1)(xy-1)}{xy}, \forall x, y \in \mathbf{R}^*.$$

$$(4p) b) Să se rezolve în  $\mathbf{R}^*$  ecuația  $x^3 - \frac{1}{x^3} = x + x^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ .$$

$$(4p) c) Să se arate că  $ab - \frac{1}{ab} \geq a + b - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ ,  $\forall a, b \in [1, \infty)$ .$$

(2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in [1, \infty)$ ,

$$\text{avem } a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \dots - \frac{1}{a_n}.$$

- (2p) e) Să se arate că, dacă  $a, b, c \in [0, \infty)$ , atunci

$$2^{a+b+c} - 2^{-a-b-c} \geq 2^a + 2^b + 2^c - 2^{-a} - 2^{-b} - 2^{-c}.$$

$$(2p) f) Să se arate că, dacă  $x > y > 0$ , atunci  $x - \frac{1}{x} > y - \frac{1}{y}$ .$$

$$(2p) g) Să se arate că, dacă  $a \in [1, \infty)$ , atunci  $a^n - \frac{1}{a^n} \geq n \left( a - \frac{1}{a} \right)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .$$

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , definite prin

$$f_0(x) = 1 \text{ și } f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se arate că  $f_1(x) = x$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

- (4p) b) Să se calculeze  $f_2(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

- (4p) c) Să se rezolve în  $\mathbf{R}$  ecuația  $f_1(x) + f_2(x) = 0$ .

$$(2p) d) Să se arate că  $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .$$

$$(2p) e) Să se arate că  $f'_{n+1}(x) = f_n(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ .$$

$$(2p) f) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_3(x)}{f_2(x)}$ .$$

$$(2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1)$ .$$

*Varianta 025*

**SUBIECTUL I**

- a) 30 .
- b)  $\sqrt{10}$ .
- c)  $\sqrt{17}$  .
- d) 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
- e) 40.
- f)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ .

**SUBIECTUL II**

- 1.
- a) -12.
  - b)  $\frac{4}{5}$ .
  - c) 2.
  - d) 1. .
  - e) 0 .

2.

- a)  $3x^2 + 1$ .
- b)  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$  deci  $f$  este crescătoare  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- c) 13.
- d)  $S = \{1, -1\}$ .
- e)  $-\frac{8025}{4}$ .

**SUBIECTUL III**

a)

$$\begin{aligned}
 xy - \frac{1}{xy} - \left( x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) &= \frac{(xy)^2 - 1}{xy} - \frac{x^2 y + xy^2 - y - x}{xy} = \frac{(xy - 1)(xy + 1)}{xy} - \frac{x(xy - 1) + y(xy - 1)}{xy} = \\
 &= \frac{(xy - 1)(x - 1)(y - 1)}{xy}, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^*
 \end{aligned}$$

**b)** Din **a)**,  $x^3 - \frac{1}{x^3} - \left( x + x^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)}{x^3}$ .

Atunci  $\frac{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)}{x^3} = 0$ . Deci  $x = 1$  sau  $x = -1$ .

**c)** Din **a)**,  $ab - \frac{1}{ab} - \left( a + b - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{(a-1)(b-1)(ab-1)}{ab} \geq 0, \forall a, b \in [1, +\infty)$ .

Deci  $ab - \frac{1}{ab} \geq a + b - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}, \forall a, b \in [1, +\infty)$ .

**d)** Din **c)**,  $a_1 a_2 - \frac{1}{a_1 a_2} \geq a_1 + a_2 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$ .

Demonstrăm  $P_k \Rightarrow P_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$ .

$$P_k : a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_k - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \dots - \frac{1}{a_k},$$

adevarată  $\forall a_1, a_2, \dots, a_k \in [1, \infty)$

Cum  $a_1, a_2, \dots, a_k \in [1, \infty) \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \in [1, \infty)$  iar din **c)** avem

$$(a_1 a \dots a_k) \cdot a_{k+1} - \frac{1}{(a_1 a_2 \dots a_k) a_{k+1}} \geq a_1 a_2 \dots a_k + a_{k+1} - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \geq \\ \geq a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \dots - \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}.$$

Am obtinut  $P_k \Rightarrow P_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}^*$ . Deci

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \dots - \frac{1}{a_n}.$$

**e)** Cum  $2^a, 2^b, 2^c \geq 1, \forall a, b, c \in (0, \infty)$  atunci din **d)**, pentru  $n = 3$  avem că

$$2^a \cdot 2^b \cdot 2^c - \frac{1}{2^a \cdot 2^b \cdot 2^c} \geq 2^a + 2^b + 2^c - \frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^b} - \frac{1}{2^c}. \text{ Deci}$$

$$2^a \cdot 2^b \cdot 2^c - 2^{-a} \cdot 2^{-b} \cdot 2^{-c} \geq 2^a + 2^b + 2^c - 2^{-a} - 2^{-b} - 2^{-c}.$$

**f)** Cum  $x > y > 0$  rezultă  $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ . Atunci  $x - \frac{1}{x} > y - \frac{1}{y}$ .

**g)** Din **d)**, pentru  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  avem  $a^n - \frac{1}{a^n} \geq na - \frac{n}{a}$ .

#### SUBIECTUL IV

**a)**  $f_1(x) = \int_0^x f_0(t) dt = t \Big|_0^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**b)**  $f_2(x) = \int_0^x f_1(t) dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$ .

c)  $f_1(x) + f_2(x) = 0$ , devine  $x + \frac{x^2}{2} = 0$ .

Atunci  $x = 0$  sau  $x = -2$ .

d) Din b),  $f_2(x) = \frac{x^2}{2!}$ . Presupunem  $f_k(x) = \frac{x^k}{k!}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$  și demonstrăm

$$f_{k+1}(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}, \forall x \in \mathbf{R}.$$

$$f_{k+1}(x) = \int_0^x \frac{t^k}{k!} dt = \int_0^x t' \cdot \frac{t^k}{k!} dt = \left( t \cdot \frac{t^k}{k!} \right) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t \cdot k \cdot t^{k-1}}{k!} dt = \frac{x^{k+1}}{k!} - k \int_0^x \frac{t^k}{k!} dt =$$

$$= \frac{x^{k+1}}{k!} - k \cdot \frac{t^{k+1}}{k!(k+1)} \Big|_0^x = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$



Deci  $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

e)  $f'_{n+1}(x) = \frac{(n+1) \cdot x^n}{(n+1)!} = \frac{x^n}{n!} = f_n(x)$ .

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_3(x)}{f_2(x)} = +\infty$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0$ .