

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta024

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(1, -2, 3)$ la punctul $E(0, 1, 2)$.
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la hiperbola $x^2 - 4y^2 = 12$ în punctul $P(-4, 1)$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(4, 2)$, $M(3, 3)$ și $N(2, 4)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se dea un exemplu de număr natural n pentru care $\sin \frac{n\pi}{6} = 1$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(1, 2)$ și $C(2, 1)$ să aparțină dreptei $x + ay + b = 0$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se calculeze suma $2 + 4 + 6 + \dots + 20$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ să verifice egalitatea $\hat{3}\hat{x} = \hat{0}$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 2$ are inversa $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, să se calculeze $g(1)$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x^2 + 7) = \log_2(x^4 + 8)$.
- (3p) e) Să se calculeze suma cuburilor rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X$.

2.

- (3p) a) Să se găsească o funcție $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ derivabilă, astfel încât $f'(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se găsească o funcție continuă $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ neconstantă, astfel încât $\int_0^1 g(x)dx = 2007$.
- (3p) c) Să se găsească o funcție $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ concavă pe \mathbf{R} .
- (3p) d) Să se găsească o funcție $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ strict descrescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 1}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și submulțimea

$$G = \{X \in M_2(\mathbf{C}) \mid AX = XA\}.$$

- (4p) a) Să se verifice că $A \in G$ și $I_2 \in G$.
- (4p) b) Să se găsească o matrice $T \in M_2(\mathbf{C})$ cu proprietatea $T \notin G$.
- (4p) c) Să se verifice că $A^2 = -I_2$.
- (2p) d) Să se arate că $A^2 X = X A^2$, $\forall X \in M_2(\mathbf{C})$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $a, b \in \mathbf{C}$, atunci matricea $aI_2 + bA \in G$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $Y \in G$, atunci există $x, y \in \mathbf{C}$ astfel încât $Y = xI_2 + yA$.
- (2p) g) Să se arate că matricea A^n este inversabilă oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \ln a - a \ln x$, unde $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
- (4p) b) Să se calculeze $f(a)$ și $f'(a)$.
- (4p) c) Utilizând teorema lui Fermat, să se determine $a > 0$ astfel încât
 $f(x) \geq 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (2p) d) Să se arate că $e^x \geq x^e$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (2p) e) Să se arate că $\int_0^1 e^x dx \geq \int_0^1 x^e dx$.
- (2p) f) Să se arate că pentru $x > 0$, avem $e^x = x^e$ dacă și numai dacă $x = e$.
- (2p) g) Să se determine numerele reale $c, b > 0$ cu proprietatea că
 $c^x + b^x \geq x^c + x^b$, $\forall x \in (0, \infty)$.

Varianta 024

SUBIECTUL I

- a) 0.
- b) $\sqrt{11}$.
- c) $x + y + 3 = 0$.
- d) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
- e) $n = 3$
- f) $a = 1$ și $b = -3$.

SUBIECTUL II

- 1.
- a) 110.
- b) $\frac{1}{2}$.
- c) 1
- d) $S = \{-1, 1\}$
- e) 0.

2.

- a) $f(x) = \frac{x^3}{3}$.
- b) $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 4014x$;
- c) $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = -x^2$;
- d) $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $u(x) = -\frac{x^3}{3}$.
- e) 1

SUBIECTUL III

- a) Cum $A \cdot A = A \cdot A$, atunci $A \in G$.
 $AI_2 = I_2A$, atunci $I_2 \in G$.
- b) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- c) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$.
- d) Fie $X \in M_2(\mathbf{C})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A^2 X = -I_2 X = -X \text{ iar } X A^2 = X(-I_2) = -X.$$

Deci $A^2 X = X A^2$, $\forall X \in M_2(\mathbf{C})$.

e) Fie $B = aI_2 + bA = \begin{pmatrix} a & bi \\ bi & a \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & bi \\ bi & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & ai \\ ai & -b \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & bi \\ bi & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & ai \\ ai & -b \end{pmatrix}.$$

Atunci $AB = BA$, deci $aI_2 + bA \in G$.

f) Fie $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, $a, b, c, d \in \mathbf{C}$.

Cum $Y \in G$, avem $AY = YA$.

Atunci

$$\begin{pmatrix} ic & id \\ ia & ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ib & ia \\ id & ic \end{pmatrix} \text{ sau } c = b, a = d. \text{ Obținem } Y = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = aI_2 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aI_2 - bi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Alegem $x = a \in \mathbf{C}$, iar $y = -bi \in \mathbf{C}$.

g) Se obține $A^k = \begin{cases} I_2, \text{daca } n = 3k \\ A, \text{daca } n = 3k + 1 \\ -I_2, \text{daca } n = 3k + 2 \end{cases}$.

Cum $\det I_2 = 1 \neq 0 \Rightarrow I_2$ este inversabilă.

Cum $\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă.

$\det(-I_2) = 1 \neq 0 \Rightarrow -I_2$ este inversabilă.

Atunci matricea A^n este inversabilă $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \ln a - \frac{a}{x}$.

b) $f(a) = 0$, $f'(a) = \ln a - 1$.

c) Presupunem că $f(x) \geq 0$, $\forall x > 0$. Cum $f(a) = 0$, avem $f(x) \geq f(a)$, $\forall x > 0$, rezultă că $x = a$ este punct de minim local, deci din teorema lui Fermat, $f'(a) = 0$, adică $a = e$. Deci, în mod necesar $a = e$.

Avem $f(x) = x - e \ln x$.

Arătăm că pentru $a = e$, $f(x) \geq 0$, $\forall x > 0$.

Avem tabelul de variație:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-	0	+	1
$f(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$

$x_0 = e$ este punct de minim local $\Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x > 0.$

d) Cum $f(x) \geq 0, \forall x > 0$ atunci $x \ln a - a \ln x \geq 0$ sau $\ln a^x \geq \ln x^a$ rezultă că $a^x \geq x^a, \forall x \in (0, \infty), \forall a > 0.$

Atunci $e^x \geq x^e, \forall x \in (0, \infty).$

e) Din **d)**, avem $e^x \geq x^e, \forall x \in (0, \infty).$ Atunci $\int_0^1 e^x dx \geq \int_0^1 x^e dx.$

f) Dacă $x = e$, evident.

Dacă $e^x = x^e \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = e.$

g) $c^x + b^x \geq x^c + x^b, \forall x \in (0, \infty)$, pentru $x = e$ avem $c^e + b^e \geq e^c + e^b \geq c^e + b^e.$

Aceasta este posibilă numai când $c^e = c^e$ și când $b^e = b^e$, adică $c = e$ și $b = e$. Deci $c = b = e$.