

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
*Varianta ....023*

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine partea reală a numărului complex  $(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})$ .
- (4p) b) Să se dea un exemplu de număr întreg care este mai mare decât  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ .
- (4p) c) Să se scrie ecuația unui cerc cu centru în punctul  $C(2,3)$ .
- (4p) d) Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  dacă punctul  $C(2,3)$  este mijlocul segmentului determinat de punctele  $A(a,2)$  și  $B(1,b)$ .
- (2p) e) Să se calculeze determinantul  $d = \begin{vmatrix} \sin \pi & \cos \pi \\ -\cos \pi & \sin \pi \end{vmatrix}$ .
- (2p) f) Să se dea un exemplu de două numere reale  $x$  și  $y$  pentru care matricea  $A = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$  are rangul 2.

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se calculeze în câte feluri se pot alege 2 elevi dintr-un grup de 4 elevi.
- (3p) b) Să se dea un exemplu de funcție neconstantă  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  pentru care  $f(2) = f(4)$ .
- (3p) c) Să se dea un exemplu de număr întreg  $m$  pentru care  $2^m > \frac{1}{4}$  și  $4^m < \frac{1}{2}$ .
- (3p) d) Să se dea un exemplu de ecuație de gradul al doilea cu coeficienți reali pentru care suma rădăcinilor sale este egală cu 4.
- (3p) e) Să se arate că funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2$  are proprietatea că există  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq b$  astfel încât  $f(a) = f(b)$ .

2. Se consideră funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ .

- (3p) a) Să se verifice că  $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ ,  $\forall x \in [0, \infty)$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (3p) d) Să se determine ecuația asimptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră mulțimea  $A = (-1, \infty)$  și pe  $\mathbf{R}$  se definește operația " $\Delta$ " prin

$$x\Delta y = x + y + xy, \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se arate că " $\Delta$ " este lege de compozиție pe mulțimea  $A$ .
- (4p) b) Să se arate că legea " $\Delta$ " este asociativă și comutativă.
- (4p) c) Să se determine elementul neutru al legii " $\Delta$ ".
- (2p) d) Să se arate că orice element al mulțimii  $A$  este simetrizabil în raport cu legea de compozиție " $\Delta$ ".
- (2p) e) Să se rezolve în mulțimea  $A$  ecuația  $x\Delta x = 3$ .
- (2p) f) Să se arate că există un număr real  $b$  astfel încât pentru orice  $x$  real să fie adevărată egalitatea  $b\Delta x = x\Delta b = b$ .
- (2p) g) Să se determine numărul
 
$$H = (-2007)\Delta(-2006)\Delta(-2005)\Delta\dots\Delta(2005)\Delta(2006)\Delta(2007).$$

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se determine punctul de extrem local al funcției  $f$ .
- (4p) c) Să se arate că dreapta de ecuație  $y = 0$  este asimptotă spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (2p) d) Să se arate că  $0 < f(x) \leq 1$ ,  $\forall x \in [0, \infty)$ .
- (2p) e) Să se arate că  $y + \frac{1}{y} \geq 2$ ,  $\forall y \in (0, \infty)$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx \geq \frac{3}{e}$ .

## Varianta 023

### SUBIECTUL I

- a) 3; b) Se poate alege orice număr întreg mai mare decât 2. c)  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ ;  
 d)  $a=3$  și  $b=4$ ; e)  $d=1$ ; f)  $\det(A) = \sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x-y)$ . Dacă  
 alegem  $x=\frac{\pi}{3}$  și  $y=\frac{\pi}{6}$ , obținem  $\det(A)=\frac{1}{2}$ .

### SUBIECTUL II

1.

- a)  $C_4^2 = 6$ .  
 b)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ;  
 c)  $m = -1$  este singurul număr întreg care verifică cele două inegalități.  
 d) Se poate considera  $x^2 - 4x = 0$ .  
 e) Pentru orice  $a \in \mathbf{R}^*$  avem  $f(a) = f(-a) = a^2$ .

2.

a) Calcul direct.

b)  $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ ,  $x \geq 0$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

d)  $y=0$  este asimptotă orizontală spre  $+\infty$ .

e)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx = \ln \frac{4}{3}$ .

### SUBIECTUL III

- a) Fie  $x, y \in A$ , atunci  $x+1 > 0$  și  $y+1 > 0$ . Prin înmulțirea celor două inegalități se obține  $xy + x + y + 1 > 0$ , de unde rezultă  $xy + x + y > -1$  oricare ar fi  $x, y \in A$ . Atunci  $x \Delta y \in A$ .  
 b) Calcul direct;  
 c)  $e = 0$ ;  
 d) Pentru  $x \in A$ ,  $x^{-1} = -\frac{x}{x+1}$ ,  $x^{-1} \in A$ ;  
 e)  $x = 1$ ;  
 f)  $b = -1$ ;  
 g) Conform punctului f), rezultă  $H = -1$ .

### SUBIECTUL IV

a)  $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

b)  $f'(x) = 0$  admite soluția  $x = 0$  și  $f'(x) > 0$  pentru  $x \in (-\infty, 0)$  respectiv  $f'(x) < 0$  pentru  $x \in (0, \infty)$ , deci  $x = 0$  este punct de extrem (maxim).

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ;

d) Inegalitatea  $0 < f(x)$  revine la  $0 < x + 1$  care este adevărată pentru orice  $x \in (0, \infty)$ . Din punctul b) rezultă că  $x = 0$  este punct de maxim pentru funcția  $f$ . Atunci  $f(x) \leq f(0) = 1$  oricare ar fi  $x \in (0, \infty)$ .

e) Prin înmulțirea cu numărul pozitiv  $y$ , inegalitatea devine  $y^2 + 1 \geq 2y$ , care este echivalentă cu inegalitatea adevărată  $(y - 1)^2 \geq 0$ ,  $y \in (0, \infty)$ .

f)  $\int_0^1 f(x) dx = 2 - \frac{3}{e}$ .

g) Conform relației de la e) avem  $\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \geq 2$  și folosind f) avem  $\int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx \geq \frac{3}{e}$ .