

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta022

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate Oxy , se consideră punctele $A(3,4)$, $B(7,-4)$, $C(-1,2)$.

- (4p) a) Să se calculeze conjugatul numărului complex $z = -1 - 3i$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului $[AC]$.
- (4p) c) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (2p) e) Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât $x + my + n = 0$ să reprezinte ecuația dreptei BC .
- (2p) f) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $25^{2x+1} - 5^{2007} = 0$.
- (3p) b) Să se calculeze suma $7 + 17 + 27 + \dots + 97$.
- (3p) c) Să se determine probabilitatea ca alegând un element n din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ acesta să verifice inegalitatea $4n^2 \geq 4n + 3$.
- (3p) d) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 2$. Să se calculeze $(f \circ f)(1)$.
- (3p) e) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $xA_5^3 \leq 300$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2007}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x) dx$.
- (3p) d) Să se determine punctul de extrem local al funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2007} f(0)}{f(0) + n^{2007}}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 022

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}.$$

- (4p) a) Să se arate că $I_2 \in G$ și $M \in G$.
- (4p) b) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.
- (4p) c) Să se calculeze $\det(M)$.
- (2p) d) Să se arate că $\det(A) \cdot \det(B) = \det(A \cdot B)$ pentru orice $A, B \in G$.
- (2p) e) Să se rezolve în G ecuația matriceală $X^2 = M$.
- (2p) f) Să se arate că există $A \in G$ astfel încât $\det A = 25^7$.
- (2p) g) Să se arate că $\det(A) \neq 7$, $\forall A \in G$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + e^x$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .
- (4p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (2p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (2p) f) Să se arate că $f(x) \geq 2x + 1$, $\forall x \in [0, 1]$.
- (2p) g) Să se arate că $\int_0^1 \frac{1}{x + e^x} dx \leq \ln \sqrt{3}$.

Varianta 022

SUBIECTUL I

- a) $\bar{z} = -1 + 3i$; b) $AC = 2\sqrt{5}$; c) $BC^2 = AC^2 + AB^2$; d) 20; e) $m = \frac{4}{3}$ și $n = -\frac{5}{3}$;
 f) $R = \frac{BC}{2} = 5$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x = \frac{2005}{4}$; b) 520; c) $\frac{2}{3}$; d) $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = 1$; e) $x \in (-\infty, 5]$.

2.

a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2007}}$, $x \in \mathbf{R}$.
 b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = \frac{1}{4\sqrt{14}}$.
 c) $\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2007) dx = \frac{6022}{3}$.

d) $f'(x) = 0$ admite soluția $x = 0$ și $f'(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, 0)$ respectiv $f'(x) > 0$ pentru $x \in (0, \infty)$ rezultă $x = 0$ este punct de minim local pentru funcția f .

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2007} f(0)}{f(0) + n^{2007}} = \sqrt{2007}$.

SUBIECTUL III

- a) Pentru $a = 1 \in \mathbf{Z}$ și $b = 0 \in \mathbf{Z}$, avem $I_2 \in G$. Pentru $a = 3 \in \mathbf{Z}$ și $b = 4 \in \mathbf{Z}$, avem $M \in G$.
 b) calcul direct;
 c) $\det(M) = 25$.
 d) calcul direct;
 e) $X_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $X_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

f) Pentru orice matrice $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$ avem $\det(X(a,b))=a^2+b^2$. Pentru ca $\det(A)=25^7$ este necesar ca $a^2+b^2=25^7$. Se alege $a=25^3 \cdot 3$ și $b=25^3 \cdot 4$, atunci $a^2+b^2=25^6(3^2+4^2)=25^7$.

g) $\det(A) \neq 7$, oricare ar fi $A \in G \Leftrightarrow a^2+b^2 \neq 7$ pentru orice $a,b \in \mathbf{Z}$;
 $7=0+7=1+6=2+5=3+4$ și în nici una din cele 4 sume ambii termeni ai sumei nu sunt pătrate perfecte, deci 7 nu poate fi scris ca suma de pătrate perfecte.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=1+e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

b) Cum $f'(x)=1+e^x > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, rezultă că f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = 2$.

d) $\int_0^1 (x+e^x) dx = e - \frac{1}{2}$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

f) $f(x) \geq 2x+1$ revine la $e^x - x - 1 \geq 0$. Fie funcția $g : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = e^x - x - 1$. Cum $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$ oricare ar fi $x \in [0,1]$, avem că g este crescătoare pe $[0,1]$, deci $g(x) \geq g(0) = 0$ oricare ar fi $x \in [0,1]$. Atunci $e^x \geq x+1$ oricare ar fi $x \in [0,1]$.

g) Din $f(x) \geq 2x+1$, $x \in [0,1]$ avem $\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{2x+1}$, $x \in [0,1]$. Atunci

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{e^x + x} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(2x+1) \Big|_0^1 = \frac{\ln 3}{2} = \ln \sqrt{3}.$$