

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta021

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(3, 4)$ și $C(4, -5)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$.
- (4p) d) Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2 + y^2 = 25$ în punctul $P(3, -4)$.
- (4p) e) Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC în care $AB = 2$, $AC = 2$ și $m(\angle BAC) = 30^\circ$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe
- $$a + bi = (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^3.$$

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se calculeze elementul $\hat{2}^{2007}$ în (\mathbf{Z}_{12}, \cdot) .
- (3p) b) Să se calculeze $C_{12}^3 - C_{12}^9$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_2 x = \log_4 x$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x = 4^x$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $n! < n^3$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 2x - 10$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} + 3}{5\sqrt{n} - 2}$.

Descarcă de pe site-ul ebacalaureat.ro

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ și $g = X^3 + X^2 + X + 1$, care are rădăcinile $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$.

- (4p) a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
- (4p) b) Să se calculeze $g(-1)$.
- (4p) c) Să se calculeze $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$.
- (2p) d) Să se determine y_1, y_2 și y_3 .
- (2p) e) Să se calculeze $y_1^{2007} + y_2^{2007} + y_3^{2007}$.
- (2p) f) Să se arate că numărul $b = g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot g(x_3) \cdot g(x_4)$ este natural.
- (2p) g) Să se arate că $f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) = 3$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x (ax^2 + bx + c)$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$ și funcțiile $g_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g_n(x) = e^x (-x^2 + (2n+1)x + n^2)$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și $f''(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $g_n(0)$, $n \in \mathbf{N}$.
- (4p) c) Să se calculeze $g'_0(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ dacă $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ și $f''(0) = 4$.
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_1(0) + g_2(0) + \dots + g_n(0)}{n^3}$.
- (2p) g) Să se calculeze $\int_0^1 g_0(x) dx$.

Varianta 021

SUBIECTUL I

- a) 13.
- b) $\sqrt{82}$.
- c) $\frac{1}{2}$.
- d) $3x - 4y - 25 = 0$
- e) $BC = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
- f) $a = 0, b = 1$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $\hat{8}$.
- b) 0.
- c) 1.
- d) 0.
- e) $\frac{4}{5}$.

2.

- a) $3x^2 + 2$.
- b) $-\frac{35}{4}$.
- c) 2.
- d) $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- e) $\frac{2}{5}$.

SUBIECTUL III

- a) Catul este X iar restul este 1.
- b) $g(-1) = 0$.
- c) $x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{1}{1} = 1$.
- d) $y^3 + y^2 + y + 1 = 0$ sau $(y+1)(y^2 + 1) = 0$, atunci $y_1 = -1, y_2 = i, y_3 = -i$.
- e) $y_1^{2007} + y_2^{2007} + y_3^{2007} = -1$.
- f) Din a), avem $f(X) = Xg(X) + 1$. Deci $X g(X) = f(X) - 1$.
 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$.

$$\text{Atunci } g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4) = \frac{-1}{x_1} \cdot \frac{-1}{x_2} \cdot \frac{-1}{x_3} \cdot \frac{-1}{x_4} = \frac{1}{x_1 x_2 x_3 x_4} = \frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}.$$

g) Din **f**) , avem $f(X) = Xg(X) + 1$. Cum $g(y_1) = g(y_2) = g(y_3) = 0$
 $f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) = 3$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = e^x [ax^2 + (2a+b)x + b + c]$.

$$f''(x) = e^x [ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b + c].$$

b) $g_n(0) = e^0 (0 + n^2) = n^2$.

c) $g'_0(x) = e^x (-x^2 - x + 1)$.

d) Cum $f(0) = c \Rightarrow c = 0$. Cum $f'(0) = b + c$, iar $f'(0) = 1 \Rightarrow b = 1$.

Din $f''(0) = 4$ obținem $2a + 2b + c = 4$. Deci $a = 1$.

e) Verificăm propoziția pentru $n = 1$.

$$P(1): 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}; \text{ adevărată. Demonstrăm } P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

$$P(k): 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \forall k \in \mathbf{N}^*; \text{ adevărată.}$$

$$P(k+1): 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}, \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

$$\begin{aligned} \text{Obținem } & \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \\ & = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}, \forall k \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

Deci, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_1(0) + g_2(0) + \dots + g_n(0)}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{h)} \int_0^1 g_0(x) dx &= \int_0^1 e^x (-x^2 + x) dx = \int_0^1 (e^x)' (-x^2 + x) dx = e^x (-x^2 + x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x (-2x + 1) dx = \\ &= - \int_0^1 (e^x)' (-2x + 1) dx = -e^x (-2x + 1) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x (-2) dx = \\ &= e + 1 - 2e^x \Big|_0^1 = -e + 3. \end{aligned}$$