

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta020

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(1,3)$ și $B(4,-1)$.
- (4p) b) Să se scrie ecuația paralelei prin $A(1,3)$ la dreapta de ecuație $x + y = 0$.
- (4p) c) Să se scrie ecuația cercului cu centrul în $A(1,3)$ și de rază 1.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AB = 3, AC = 4$ și $BC = 5$.
- (2p) e) Să se determine care număr este mai mare $a = \cos \frac{3\pi}{7}$ sau $b = \cos \frac{5\pi}{7}$
- (2p) f) Să se calculeze $\sin \frac{31\pi}{4}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine câte numere de trei cifre distincte se pot forma numai cu cifrele 2,4,6.
- (3p) b) Să se calculeze câte submulțimi are mulțimea $\{0,2,4,6\}$.
- (3p) c) Să se calculeze suma soluțiilor ecuației $\log_2(x^2 + 3) = 2$.
- (3p) d) Să se calculeze suma $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 37$.
- (3p) e) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^3 + 2X^2 - 2X - 4$.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + \sin x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și submulțimea $G = \{X \in M_2(\mathbf{R}) \mid A \cdot X = B\}$.

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei A și să se precizeze rangul acesteia.
- (4p) b) Să se determine matricea $C = A \cdot B - B \cdot A$.
- (4p) c) Să se calculeze A^2 .
- (2p) d) Să se arate că pentru orice număr n natural nenul există x_n natural astfel încât $A^n = x_n \cdot A$.
- (2p) e) Să se arate că mulțimea G are cel puțin 2007 elemente.
- (2p) f) Să se arate că există $Y \in G$ care verifică $Y^2 + Y = O_2$.
- (2p) g) Să se găsească o matrice $D \in M_2(\mathbf{R})$, $D \neq O_2$, pentru care $A \cdot D = D \cdot A = O_2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot \ln x$ și $g(x) = 1 + \ln x$

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și $g'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se determine punctul de extrem local al funcției f .
- (4p) c) Să se arate că f este convexă pe $(0, \infty)$ și g este concavă pe $(0, \infty)$.
- (2p) d) Să se arate că $1 + e \cdot x \cdot \ln x \geq 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (2p) e) Să se arate că graficul funcției f nu are asymptote.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.
- (2p) g) Să se arate că pentru orice primitivă G a funcției g este adevărată inegalitatea $G(2007) > G(2006)$.

Varianta 020

SUBIECTUL I

- a) $|AB|=5$. b) $x+y-4=0$. c) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$. d) 6. e) Deoarece $\frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{7}$, rezultă $b < 0 < a$. f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $3! = 6$. b) $2^4 = 16$. c) Soluțiile sunt $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$. Atunci suma soluțiilor este 0.
d) $1+5+9+13+\dots+117=1711$. e) -2

2.

- a) $f'(x) = 1 + \cos x$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
 d) $\int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi^2}{2} + 2$.
 e) $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 + 0 = 0$.

SUBIECTUL III

- a) $\det(A) = 0$ și $\text{rang}(A) = 1$;

b) $C = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -27 & 9 \end{pmatrix}$;

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 42 \end{pmatrix}$;

- d) folosind principiul inducției matematice se obține $x_n = 7^{n-1}$, $n \geq 1$.

- e) Avem $G = \left\{ X \in M_2(\mathbf{R}) \mid A \cdot X = B \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1-2a & 1-2b \\ a & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R} \right\}$, deci G are o infinitate de elemente.

f) $Y = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

g) Matricele $D \in M_2(\mathbf{R})$, $D \neq O_2$, pentru care $A \cdot D = D \cdot A = O_2$ sunt

$$D = \begin{pmatrix} 6x & -2x \\ -3x & x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R}. \text{ Se poate alege matricea } D = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 1 + \ln x$ și $g'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

b) $f'(x) = 0$ admite soluția $x = \frac{1}{e}$ și $f'(x) < 0$ pentru $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ respectiv $f'(x) > 0$

pentru $x > \frac{1}{e}$, deci $x = \frac{1}{e}$ este puncte de extrem (minim) local.

c) $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, $x > 0$, rezultă că funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.

$g''(x) = -\frac{1}{x^3} < 0$, $x > 0$, rezultă că funcția g este concavă pe $(0, \infty)$.

d) $x = \frac{1}{e}$ este punct de minim pentru funcția f , rezultă că $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$ oricare ar fi

$$x > 0 \text{ deci } x \ln x \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow 1 + ex \ln x \geq 0, \quad x > 0.$$

e) f este continuă pe $(0, \infty)$ și $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, deci nu are asymptote verticale

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ rezultă că } f \text{ nu are asymptotă orizontală spre } \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty \text{ funcția } f \text{ nu are asymptotă oblică spre } \infty.$$

f) $\int_1^e f(x) dx = \frac{1+e^2}{4}$.

g) Fie $G: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ o primitivă a lui g . Din a) avem $G(x) = f(x) + C$, unde C este

o constantă reală. Cum funcția f este crescătoare pe $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$ avem

$$G(2007) > G(2006).$$