

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta019

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care dreptele

$d_1 : x + y - 1 = 0$ și $d_2 : 2x + ay + 3 = 0$ sunt paralele.

- (4p) b) Să se determine numărul diagonalelor unui poligon convex cu 8 laturi.

- (4p) c) Să se calculeze modulul numărului complex $z = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{11}$.

- (4p) d) Să se calculeze raza cercului de ecuație $x^2 + y^2 - 2x = 3$.

- (2p) e) Să se calculeze suma $\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4}$.

- (2p) f) Să se rezolve ecuația $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [0, \pi]$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ și se notează cu a, b rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

- (3p) a) Să se determine valoarea minimă a funcției f .

- (3p) b) Să se calculeze suma $\frac{1}{2a-a^2} + \frac{1}{2b-b^2}$.

- (3p) c) Să se determine numerele reale y pentru care $f(3^y) = 6$.

- (3p) d) Să se calculeze produsul rădăcinilor ecuației $f(\log_2 t) = 11$.

- (3p) e) Să se arate că determinatul $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ a & b \end{vmatrix}$ este număr natural.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (3p) b) Să se rezolve în \mathbf{R}^* inecuația $f(x) \leq \frac{1}{2x}$.

- (3p) c) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \cdot f(n))$.

- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar pentru o matrice oarecare $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ se notează $a + d = tr(A)$.

- (4p) a) Să se arate că pentru orice două matrice $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ este adevărată egalitatea $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.
- (4p) b) Să se arate că pentru orice matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ este adevărată egalitatea $A^2 - tr(A) \cdot A + (\det A) \cdot I_2 = O_2$.
- (4p) c) Să se găsească o matrice $X \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $\det(X) = 0$ și $tr(X) = 5$.
- (2p) d) Să se arate că dacă $Y \in M_2(\mathbf{R})$, $\det(Y) = 0$ și $tr(Y) = 5$, atunci pentru orice n natural, $n \geq 2$, are loc egalitatea $Y^n = 5^{n-1} \cdot Y$.
- (2p) e) Să se demonstreze că $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, $\forall A, B \in M_2(\mathbf{R})$.
- (2p) f) Să se găsească două matrice $X, Y \in M_2(\mathbf{R})$, $X \neq Y, X, Y \neq O_2$ care verifică $X^2 = Y^2 = O_2$.
- (2p) g) Să se arate că dacă $X, Y \in M_2(\mathbf{R})$ și $X^2 = Y^2 = O_2$, atunci $tr(X + Y) = 0$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x - 2x$ și $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \cos x + \ln(\cos x) + x^2$

- (4p) a) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.
- (4p) b) Să se arate că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, $\forall a, b \in (0, \infty)$.
- (2p) c) Să se arate că $\cos x \geq \cos^2 x$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (2p) d) Să se arate că funcția f este crescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (2p) e) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (2p) f) Să se arate că $f(x) + g'(x) = 0$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (2p) g) Să se arate că funcția g este descrescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (2p) h) Să se arate că $\int_0^1 (\cos x + \ln(\cos x)) dx \leq \frac{2}{3}$.

Varianta 019

SUBIECTUL I

- a) $a = 2$; b) $C_8^2 - 8 = 20$; c) $|z| = |-1| = 1$; d) $(x-1)^2 + y^2 = 4$, $r = 2$; e) 0;
 f) $x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) Avem $f(x) = (x-1)^2 + 2 \geq 2$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$;
 b) Cum $f(a) = f(b) = 0$ rezultă $2a - a^2 = 2b - b^2 = 3$, atunci $\frac{1}{2a-a^2} + \frac{1}{2b-b^2} = \frac{2}{3}$;
 c) $y = 1$;
 d) 4;
 e) $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ a & b \end{vmatrix} = ab = 3$.

2.

- a) $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbf{R}$.
 b) $f(x) \leq \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2x(x^2+1)} \geq 0$, deci $x \in (0, \infty)$.
 c) $y = 0$ asimptota orizontală spre $+\infty$.
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$.
 e) $\int_0^1 f(x) dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL III

- a) Calcul direct.
 b) Calcul direct.
 c) Se poate alege matricea $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $\det(C) = 0$ și $tr(C) = 5$.
 d) Dacă pentru $Y \in M_2(\mathbf{R})$ satisface $\det(Y) = 0$ și $tr(Y) = 5$, atunci, folosind rezultatul de la b) avem $Y^2 = 5Y$. Prin inducție matematică se arată că $Y^n = 5^{n-1}Y$ pentru orice $n \geq 2$.

e) Calcul direct.

f) Conform rezultatului de la b), trebuie să alegem două matrice cu determinantul și urma nule. Se poate considera $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

g) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$. Egalitatea $X^2 = O_2$ implică $a=b=c=d=0$ sau

$a+d=0$. În fiecare caz avem $\text{tr}(X)=0$, deci oricare ar fi $X \in M_2(\mathbf{R})$ dacă $X^2 = O_2$, atunci $\text{tr}(X)=0$. Folosind a), rezultă că $\text{tr}(X+Y)=\text{tr}(X)+\text{tr}(Y)=0$ oricare ar fi $X, Y \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $X^2 = Y^2 = O_2$.

SUBIECTUL IV

a) $f(0)=0$ și $f'(0)=0$;

b) $\frac{a+b}{b-a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$ adevărat pentru $a, b \in (0, \infty)$;

c) Cum $\cos x \in (0, 1]$ pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, iar funcția putere este descrescătoare pentru baza subunitară, rezultă $\cos x \geq \cos^2 x$ pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

d) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x - 2 \geq \frac{1}{\cos x} + \cos x - 2$ și folosind b) pentru $\frac{a}{b} = \cos x$, obținem $f'(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci funcția f este crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

e) Funcția f este continuă și crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $f(x) \geq f(0) = 0$ oricare ar fi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

f) Avem $f(x) + g'(x) = \tan x + \sin x - 2x - \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} + 2x = 0$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

g) Din f) rezultă $g'(x) = -f(x) \leq 0$ oricare ar fi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci funcția g este descrescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

h) g este descrescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ rezultă $g(x) \leq g(0) = 1$ oricare ar fi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Atunci $\cos x - \ln(\cos x) = g(x) - x^2 \leq 1 - x^2$, de unde

$$\int_0^1 \cos x - \ln(\cos x) dx \leq \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{2}{3}.$$