EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….018**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele A(1,-1), B(4,3).

(4p) **b)** Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(1,-1)$ față de punctul $B(4,3)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$.

(4p) **d)** Să se determine punctul de pe dreapta $d: x-3y+6=0$ care are coordonatele egale.

(2p) **e)** Să se determine soluțiile complexe ale ecuației $x^2+4=0$.

(2p) **f)** Să se calculeze partea reală a numărului complex $\frac{2+3i}{(2-i)^2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ inecuația $1-3x\geq 10$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\log_2\frac{1}{2}+\log_3\frac{1}{3}$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_3(x^2+5)=2$.

(3p) **d)** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2\}\to\{1,2,3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $n!<2^{n+1}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{4n+5}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$.

(4p) **b)** Să se verifice identitatea $X^2 - 5I_2 = (X - \sqrt{5}I_2)(X + \sqrt{5}I_2)$, $\forall X \in M_2(\mathbf{Q})$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă polinomul $f \in \mathbf{Q}[X]$, $f = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ are o rădăcină egală cu $\sqrt{5}$, atunci $a + d = 0$ şi $ad - bc = -5$.

(2p) **d)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$.

(2p) **e)** Să se găsească o matrice $B \in M_2(\mathbf{Q})$, cu proprietatea $B^2 = 5I_2$.

(2p) **f)** Să se arate că $\det(XY) = \det(X) \cdot \det(Y)$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{Q})$.

(2p) **g)** Să se arate că, dacă $\det(X^2 - 5I_2) = 0$, unde $X \in M_2(\mathbf{Q})$, atunci $X^2 = 5I_2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3^x + 3^{-x}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(2p) **d)** Să se arate că $f(x) \geq 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{f(x)}$.

(2p) **g)** Să se rezolve în mulțimea $(0, \infty)$ ecuația $f(x) + f(x^{27}) = f(x^5) + f(x^{2007})$.

Varianta 018

SUBIECTUL **I**

1.

a) $M\left(\frac{5}{2},1\right)$.

b) $C(7,7)$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

d) $P(3,3)$

e) $S=\{2i,-2i\}$

f) $-\frac{6}{25}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x\in(-\infty,-3]$.

b) -2 .

c) 2 .

d) 3 .

e) $\frac{4}{5}$.

2.

a) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

b) $\frac{\pi}{4}$.

c) 1.

d) $f'(x)>0, \forall x\in$ **R.** Deci funcția f este strict crescătoare pe **R** .

e) $\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$.

Cum $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$,

atunci $\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Obținem $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,adevărat.

b)Fie $X \in M_2(\mathbf{Q}), X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$X^2 - 5I_2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz - 5 & xy + yt \\ xz + zt & yz + t^2 - 5 \end{pmatrix}$.

$X - \sqrt{5}I_2 = \begin{pmatrix} x - \sqrt{5} & y \\ z & t - \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

$X + \sqrt{5}I_2 = \begin{pmatrix} x + \sqrt{5} & y \\ z & t + \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

$\left(X - \sqrt{5}I_2\right)\left(X + \sqrt{5}I_2\right) = \begin{pmatrix} x^2 - 5 + yz & xy - \sqrt{5}y + yt + \sqrt{5}y \\ xz + z\sqrt{5} + zt - \sqrt{5}z & yz + t^2 - 5 \end{pmatrix}$.

Deci $X^2 - 5I_2 = \left(X - \sqrt{5}I_2\right)\left(X + \sqrt{5}I_2\right)$.

c) $f\left(\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}^2 - (a + d)\sqrt{5} + ad - bc = 0$ sau $(5 + ad - bc) = (a + d)\sqrt{5}$ **.**

Atunci $5 + ad - bc = 0$ şi $a + d = 0$**.**Am obținut $a + d = 0$ şi $ad - bc = -5$ **.**

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5$.

e)Fie $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Avem $B^2 = 5I_2$.

f)Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,$Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$;

$XY = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$; $\det(XY) = adxt - adzy - bcxt + bczy$.

$\det X = ad - bc$.

$\det Y = xt - zy.$

$\det X \det Y = adxt - adzy - bcxt + bczy$.

Deci $\det(XY) = \det X \det Y, \forall X, Y \in M_2(\mathbf{Q})$.

g) $X^2 - 5I_2 = \left(X - \sqrt{5}I_2\right)\left(X + \sqrt{5}I_2\right)$, $\forall X \in M_2(\mathbf{Q})$,

iar $\det\left(X^2 - 5I_2\right) = \det\left(X - \sqrt{5}I_2\right)\det\left(X + \sqrt{5}I_2\right)$.

Cum $\det\left(X^2 - 5I_2\right) = 0$,obținem

$\det\left(X - \sqrt{5}I_2\right) = 0$ sau $\det\left(X + \sqrt{5}I_2\right) = 0$.

Fie X= $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $x, y, z, t \in$ **Q.**

Atunci $X-\sqrt{5}I_2=\begin{pmatrix} x-\sqrt{5} & y \\ z & t-\sqrt{5}\end{pmatrix}$.

$\det\left(X-\sqrt{5}I_2\right)=xt-x\sqrt{5}-t\sqrt{5}+5-zy=0$ sau $xt-zy+5=(x+t)\sqrt{5}$.

Atunci $xt-zy+5=0$ şi $x+t=0$ .Deci , $xt-zy=-5$.

Dar $X^2-(x+t)X+(xt-zy)I_2=O_2$ .Deci $X^2-5I_2=O_2$ sau $X^2=5I_2$.

Dacă $\det\left(X+\sqrt{5}I_2\right)=0$ se rezolvă in acelaşi mod.

SUBIECTUL IV

a) $f(-x)=3^{-x}+3^{x}=f(x)$.

b) $f'(x)=\ln 3\left(3^x-3^{-x}\right)$.

c) $f'(x)=0,$ rezultă. $x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Deci funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

d) $f(x)\geq 2$ este echivalentă cu $3^x+3^{-x}\geq 2$.

Din inegalitatea mediilor avem $m_a\geq m_g$ .Atunci

$3^x+3^{-x}\geq 2,\forall\ x\in\mathbf{R}$.

e) $f''(x)>0,\ \forall\ x\in\mathbf{R}$ .Deci f este convexă pe $\mathbf{R}$.

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3^x-3^{-x}}{\ln 3}}{3^x+3^{-x}}=\dfrac{1}{\ln 3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x\left(1-3^{-2x}\right)}{3^x\left(1+3^{-2x}\right)}=\dfrac{1}{\ln 3}$.

g) Ecuația $f(x)+f\left(x^{27}\right)=f\left(x^5\right)+f\left(x^{2007}\right)$ devine

$3^x+3^{-x}+3^{x^{27}}+3^{-x^{27}}=3^{x^5}+3^{-x^5}+3^{x^{2007}}+3^{-x^{2007}}$.

Observăm că $x=1$ este soluție.

Dacă $x>1$, cum f strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$,avem

$f(x)+f\left(x^{27}\right)<f\left(x^5\right)+f\left(x^{2007}\right),\forall x>1$ .Atunci nu avem soluție in intervalul $(1,\infty)$.

Dacă $x\in(0,1)$ se procedează analog şi din nou nu avem soluție.

Deci $x=1$ este soluție unică.