

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta017

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ dacă punctul $A(1, -2)$ aparține cercului de ecuație $x^2 + y^2 - a = 0$.
- (4p) b) Să se scrie ecuația unei drepte perpendiculare pe dreapta de ecuație $x = 4$.
- (4p) c) Să se calculeze $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4}$.
- (4p) d) Să se calculeze modulul numărului complex $z = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i$.
- (2p) e) Să se calculeze lungimea laturii $[AC]$ a triunghiului ABC în care $BC = 2$, $AB = 4$ și $m(\hat{B}) = 30^\circ$.
- (2p) f) Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $BC = 2$, $AB = 4$ și $m(\hat{B}) = 30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine simetricul elementului $\hat{3}$ în grupul $(\mathbf{Z}_8, +)$.
- (3p) b) Să se determine $x \in (0, \infty)$ pentru care $\log_3 2 + \log_3 x = 1$.
- (3p) c) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care $9^x = 27$.
- (3p) d) Să se calculeze câte numere de 4 cifre încep și se termină cu o cifră număr par.
- (3p) e) Să se calculeze în câte moduri se pot alege două persoane dintr-un grup format din 6 persoane.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(1)$.
- (3p) b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(n+1) - f(n)]$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea T a matricelor cu 3 linii și 3 coloane și care au toate elementele

$$\text{în mulțimea } U = \{0,1,2\}, \text{ precum și mulțimea } V = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| x \in U \right\} \subset T.$$

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei $A(1) \in V$ și să se determine rangul acesteia.
- (4p) b) Să se studieze dacă există $x, y \in U$ pentru care $A(x) \cdot A(y) \in V$
- (4p) c) Dacă $B = A(1) \in V$, să se calculeze B^2 și B^3 .
- (2p) d) Să se arate că pentru $B = A(1) \in V$ avem $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se arate că există $A, B \in V$ astfel încât $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A) \in U$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $C \in T$ și C are 8 elemente egale, atunci $\det C = 0$.
- (2p) g) Să se arate că există $M \in T$ cu $\det M \neq 0$ și pentru care M are 7 elemente egale.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se determine punctul de extrem local al funcției f .
- (4p) c) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- (2p) d) Să se arate că funcția f este convexă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$.
- (2p) e) Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = 3$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x)$.
- (2p) g) Să se arate că $\int_1^2 f(x) dx > 0$.

Varianta 017

SUBIECTUL I

- a) $a = 5$. b) $y = k, k \in R$ constantă; c) 0; d) $|z| = 2$; e) $AC = \sqrt{20 - 8\sqrt{3}}$; f) 2.

SUBIECTUL II

1.

a) $\hat{5}$; b) $x = \frac{3}{2}$; c) $x = \frac{3}{2}$; d) 2000 de numere; e) $C_6^2 = 15$.

2.

a) $f'(1) = 1$.

b) $y = x - 1$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(n+1) - f(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{n} = 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

e) $\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rezultă $\det(A(1)) = 1$, deci $\text{rang}(A(1)) = 3$;

b) $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 1+y & 2+y \\ 0 & xy & x+y \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix}$; $A(x) \cdot A(y) \in V$ dacă $1+y = 2+y = 1$ imposibil.

Deci $A(x) \cdot A(y) \notin V$ pentru orice $x, y \in \{0, 1, 2\}$.

c) folosind b), obținem $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Folosim principiul inducției matematice;

e) Dacă $A = A(x) \in V$ și $B = B(y) \in V$, atunci $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A) = x^2 \cdot y^2$.

Pentru ca $x^2 \cdot y^2 \in \{0, 1, 2\}$ avem posibilitățile $x = 0$ și $y \in U$, sau $x = 1$, $y = 1$, sau $x \in \{1, 2\}$ și $y = 0$.

f) Oricum am așeza 8 elemente egale, determinantul va avea două linii și două coloane egale, deci determinantul este nul.

g) Se poate considera $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in T$, pentru care $\det(M) = -1$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

b) $f'(x) = 0$ admite soluția $x = 2$ și $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ respectiv $f'(x) < 0$ pentru $x \in (0, 2)$, deci f este descrescătoare pe $(0, 2)$. Atunci $x = 2$ este punct de minim local.

c) Funcția f este continuă pe $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \infty$, deci $x = 0$ este asimptota verticală la graficul funcției f .

d) Avem $f''(x) = \frac{24}{x^4} > 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, deci f este convexă pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$.

e) Considerăm funcția continuă $g : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - 3$. Avem

$g(-1) = -3$ și $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{3}$, deci există $x_0 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ astfel încât $g(x_0) = 0$. Avem

$g\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g(1) < 0$, deci există $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ astfel încât $g(x_0) = 0$ și $g(2) \cdot g(6) < 0$, deci există $x_0 \in (2, 6)$ astfel încât $g(x_0) = 0$. Rezultă că ecuația $f(x) = 3$ admite trei soluții reale.

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x^2}{x^2} = -3$.

g) $\int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{2} > 0$.