

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
***Varianta ....016***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $z = i + i^2 + \dots + i^7$ .
- (4p) b) Să se afle partea reală a numărului complex  $\frac{1}{1+i}$ .
- (4p) c) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului cu vârfurile  $A(3;0), B(0;3), C(3;3)$ .
- (4p) d) Să se afle volumul unui cub cu diagonala de lungime  $\sqrt{12}$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\sin \pi + \sin \frac{\pi}{2}$ .
- (2p) f) Să se determine ecuația mediatoarei segmentului  $[AB]$ , unde  $A(4;3)$  și  $B(-4;3)$ .

**SUBIECTUL II (30p)**
**1.**

- (3p) a) Să se calculeze  $g(3)$ , unde funcția  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este inversa funcției  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2x + 3$ .
- (3p) b) Să se calculeze suma  $C_8^0 + C_8^1 + \dots + C_8^8$ .
- (3p) c) Să se afle produsul elementelor inversabile față de înmulțire ale inelului  $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$ .
- (3p) d) Să se determine probabilitatea ca un element al mulțimii  $\{2;4\}$  să fie soluție a ecuației  $\log_2(4x - 4) = 2$ .
- (3p) e) Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului  $f = X^4 - 7X^2 + 3 \in \mathbf{C}[X]$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ .
- (3p) a) Să se arate că  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) d) Să se determine ecuația asimptotei către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (3p) e) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} \omega^2 & \omega \\ -1 & -\omega^2 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  din  $M_2(\mathbf{C})$ , unde  $\omega$  este o rădăcină a ecuației  $x^2 + x + 1 = 0$  și funcția  $f : M_2(\mathbf{C}) \rightarrow M_2(\mathbf{C})$ ,  $f(X) = X^2 - 3X$ .

- (4p) a) Să se arate că  $(x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{C}$ .
- (4p) b) Să se arate că  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$  și că  $\omega^3 = 1$ .
- (4p) c) Să se determine matricea  $A^2$ .
- (2p) d) Să se demonstreze că  $(I_2 + A)(I_2 - A) = I_2$ .
- (2p) e) Să se demonstreze că matricea  $(I_2 + A)$  este inversabilă și să se afle inversa ei.
- (2p) f) Să se calculeze rangul matricei  $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2007}$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $f(B)$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \arctgx$  și  $g(x) = f(x) - \ln(1+x^2)$  și se definește sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ ,  $\forall n \geq 1$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $g'(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se arate că  $f$  nu are puncte de extrem local, iar  $g$  are un singur punct de extrem local.
- (2p) d) Să se arate că sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este strict crescător.
- (2p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\int_0^1 g(x) dx \leq \arctg \frac{1}{2} - \ln \frac{5}{4}$ .

## Varianta 016

### SUBIECTUL I

a) 1; b)  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+i}\right)=\frac{1}{2}$ ; c)  $R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ; d) 8; e) 1; f)  $x=0$ .

### SUBIECTUL II

1.

a)  $g(3)=0$ ; b)  $C_8^0 + C_8^1 + \dots + C_8^8 = 2^8$ ; c)  $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{4}$ ; d)  $\frac{1}{2}$ ; e) 3.

2.

a) Calcul direct.

b)  $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ ,  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$ .

d)  $y=x$  asimptotă oblică spre  $+\infty$ .

e)  $f'(x)=0$  admite soluțiile  $x_1=1$ ,  $x_2=-1$  și  $f'(x)>0$  pentru  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  și  $f'(x)<0$  pentru  $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ . Atunci  $x_1=1$  și  $x_2=-1$  sunt puncte de extrem local.

### SUBIECTUL III

a) Calcul direct.

b) Dacă  $\omega$  este o rădăcină a ecuației  $x^2 + x + 1 = 0$ , atunci  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ . Prin înmulțirea cu  $\omega - 1$  și ținând cont de a), rezultă  $\omega^3 - 1 = 0$ , deci  $\omega^3 = 1$ .

c)  $A^2 = O_2$ .

d)  $(I_2 + A)(I_2 - A) = I_2 - A^2 = I_2$ .

e)  $\det(I_2 + A) = 1 \neq 0$ , rezultă că matricea  $I_2 + A$  este inversabilă și ținând cont de d) avem  $(I_2 + A)^{-1} = I_2 - A$ .

f) Deoarece  $A^2 = O_2$ , rezultă că  $B = A$ . Cum  $\det(B) = 0$  avem că  $\operatorname{rang}(B) = 1$ .

g)  $f(B) = f(A) = -3A$ .

### SUBIECTUL IV

a)  $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

b)  $g'(x)=\frac{1-2x}{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

c)  $f'(x) > 0$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ , rezultă că  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ , deci nu are puncte de extrem.

$g'(x) = 0$  admite soluția  $x = \frac{1}{2}$  și  $g'(x) > 0$  pentru  $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$  respectiv  $g'(x) < 0$

pentru  $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ , rezultă că  $x = \frac{1}{2}$  este punct de maxim local.

d) Cum  $a_{n+1} - a_n = f(n+1) > f(0) = 0$  pentru orice  $n \geq 1$ , rezultă că sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este crescător.

e)  $\frac{\pi - 2 \ln 2}{4}$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ .

g)  $g(x) \leq g\left(\frac{1}{2}\right)$  oricare ar fi  $x \in \mathbf{R}$  și  $\int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 g\left(\frac{1}{2}\right) dx = \arctg \frac{1}{2} - \ln \frac{5}{4}$ .