EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….015**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\sqrt{3}+i$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului cu extremităţile în punctele $A(4,1)$ şi $C(1,4)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin\pi+\cos\pi$.

(4p) **d)** Să se determine lungimea medianei din A în triunghiul ABC, dacă vârfurile acestuia sunt $A(2,4)$, $B(-3,5)$, $C(1,-3)$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria unui triunghi echilateral dacă perimetrul său este egal cu 12.

(2p) **f)** Să se calculeze $\sin 105^\circ$, folosind eventual formula $\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în intervalul $(-\infty,1]$ ecuaţia $\sqrt{1-x}=2$.

(3p) **b)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f=X^3+X+1$.

(3p) **c)** Să se rezolve în intervalul $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ ecuaţia $\log_5 x=\log_5(2x-1)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x+1}=8^x$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relaţia $\log_2 n>1$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x-x+1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **b)** Să se determine matricele $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, $X\in M_{2,1}(\mathbf{C})$ pentru care $A\cdot X=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

(4p) **c)** Să se găsească o matrice $B\in M_2(\mathbf{C})$, $B\neq O_2$ cu proprietatea $A\cdot B=O_2$.

(2p) **d)** Să se calculeze produsul $C\cdot A$, unde $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

(2p) **e)** Să se găsească o matrice $D\in M_2(\mathbf{C})$, $D\neq O_2$, astfel încât $A\cdot D=D\cdot A=O_2$.

(2p) **f)** Să se arate că, dacă matricea $X\in M_2(\mathbf{C})$ verifică relaţia $A\cdot X=X\cdot A=O_2$, atunci $(A+X)^n=A^n+X^n, \forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă matricea $Y\in M_2(\mathbf{C})$ este inversabilă, atunci $A\cdot Y\neq O_2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ şi se definesc şirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$, $b_n=a_n+\dfrac{1}{2n^2}, \forall n\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se determine $\int f(x)dx$, $x\in(0,\infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

(4p) **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător.

(2p) **d)** Să se determine ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

(2p) **e)** Să se arate că $\dfrac{1}{(k+1)^3}<\dfrac{1}{2k^2}-\dfrac{1}{2(k+1)^2}, \forall k>0$.

(2p) **f)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict descrescător.

(2p) **g)** Să se arate că $1\leq a_n<1{,}22\ \forall n\in\mathbf{N}^*$.

Varianta 015

SUBIECTUL **I**

a) 2
b) $3\sqrt{2}$.
c) -1.
d) $3\sqrt{2}$.
e) $4\sqrt{3}$.
f) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II
1.
a) -3
b) 0.
c) 1.
d) 1.
e) $\frac{3}{5}$.
2.
a) $e^x - 1$.
b) $e - \frac{1}{2}$.
c) 0.
d) $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$. Deci funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.
e) 1.

SUBIECTUL III

a) $\det A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 1$.
b) $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Obținem $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$.
Fie $x_2 = a \in \mathbf{C}$. Atunci $x_1 = -2a$.
Deci, $X = \begin{pmatrix} -2a \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbf{C}$.
c) Fie $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Atunci $AB = O_2$.

d) $C \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

e)Fie $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$.

Din $A \cdot D = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

$D \cdot A = \begin{pmatrix} a+2b & 2a+4b \\ c+2d & 2c+4d \end{pmatrix}$.

Cum $A \cdot D = D \cdot A = O_2$, obținem

$a+2c=0$; $a+2b=0$; $c+2d=0$.

Rezultă $c = -\frac{a}{2}$.Dar cum $a+2b=0$,deducem $b = -\frac{a}{2}$ iar $c = \frac{a}{4}$.

Obținem $D = \begin{pmatrix} a & -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & \frac{a}{4} \end{pmatrix}$.Alegem $a=4$, deci $D = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

f)Arătăm prin inducție matematică .

Pentru $n=1$este evidentă.

$(A+X)^{n+1} = (A+X)^n(A+X) = (A^n + X^n)(A+X) = A^{n+1} + X^{n+1}$,deoarece

$A^n X = X^n A = O_2$.

g)Cum $Y \in M_2(\mathbf{C})$ inversabilă, atunci $\det Y \neq 0$.

Fie $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\det Y = ad - bc \neq 0$.

Deci $ad \neq bc$.

$AY = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$.

Presupunem prin absurd că $AY = O_2$. Atunci $a+2c=0$; $b+2d=0$.

Deci $a=-2c; b=-2d \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$.Dar $\det Y = -2cd + 2cd = 0$, contradicție cu $\det Y \neq 0$.

Deci presupunerea făcută este falsă,atunci $A \cdot Y \neq O_2$.

SUBIECTUL IV

a) $\int f(x)dx = \int x^{-3}dx = -\frac{1}{2x^2} + C$.

b) $f'(x) = -\frac{3}{x^4} < 0, \forall\ x \in (0, \infty)$.

Deci funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

c) $a_{n+1} - a_n = f(n+1) > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Deci şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător.

d) $\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

e)Inegalitatea este echivalentă cu $2k^2 < (k+1)^3 - k^2(k+1)$ sau

$2k^2 < 2k^2 + 3k + 1$, evident adevarata $\forall k > 0$

f)Cum $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)^3} - \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2}\right) < 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

obținem $b_{n+1} - b_n < 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,adică şirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict descrescător.

g)Cum $a_1 \le a_n \Rightarrow 1 \le a_n$.

Apoi $a_n < b_n \le b_3 = 1{,}22.....$ .Deci $a_n < 1{,}22 \quad , \forall n \ge 3$.

Dar $a_1 < a_2 < a_3 < 1{,}22$.

Rezultă $1 \le a_n < 1{,}22 \quad , \forall n \in \mathbf{N}^*$.