

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta013

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul $A(1,3)$ la dreapta $x + y - 5 = 0$.
- (4p) b) Să se determine $x \in [0, \pi]$ pentru care $\cos x = \frac{1}{2}$.
- (4p) c) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + m\vec{j}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + (m+1)\vec{j}$ să fie perpendiculari.
- (4p) d) Să se calculeze partea reală a produsului de numere complexe $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots i^{10}$.
- (2p) e) Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$, unde $A(2,6)$ și $B(4,8)$.
- (2p) f) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral de latură $2\sqrt{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.
- (3p) b) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $3^{x^2} = 81$.
- (3p) c) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Să se calculeze suma $f(1) + f(2) + \dots + f(20)$.
- (3p) d) Să se calculeze probabilitatea ca un număr din mulțimea $\{1, 2, 5, 6, 9, 11\}$ să fie număr prim.
- (3p) e) Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 1$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot e^x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se determine punctul de extrem local al funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(-n)}{n}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^4 - X^3 + 4X^2 + mX + n$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{C}$ și $g = X^2 + X + 1$, care are rădăcinile $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, unde $m, n \in \mathbf{R}^*$.

- (4p) a) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului f .
- (4p) b) Pentru $m = 3$ și $n = 5$, să se calculeze $f(z_1) + f(z_2)$.
- (4p) c) Pentru $m = 3$ și $n = 5$, să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
- (2p) d) Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât f să admită rădăcina $x_1 = 1 + 2i$.
- (2p) e) Să se calculeze $z_1^3 + z_2^3$.
- (2p) f) Să se calculeze $z_1^{2007} + z_2^{2007}$.
- (2p) g) Să se calculeze în funcție de m și n suma $S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x), f''(x), x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.
- (4p) c) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcției f .
- (2p) d) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f .
- (2p) e) Să se arate că $-2 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in [0, 2]$.
- (2p) f) Să se arate că $-4 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 4, \forall x \in [0, 2]$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{n^3 + 1} \right)^{2007n^2}$.

Varianta 013

SUBIECTUL I

- a) $d(A,d) = \frac{|1+3-5|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $x = \frac{\pi}{3}$; c) $m_1 = 1, m_2 = -2$; d) 0;
 e) $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 8$; f) $2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $\det(A) = 1$; b) $x \in \{\pm 2\}$; c) 480; d) $p = \frac{1}{2}$; e) $n = 2$.

2.

- a) $f'(x) = e^x(x+1)$. b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 2e$. c) $f'(x) = 0$ admite soluția $x = -1$ și $f'(x) < 0$ pentru $x < -1$ și $f'(x) > 0$ pentru $x > -1$, deci $x = -1$ este punct de minim al funcției f . d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(-n)}{n} = -\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$. e) 1.

SUBIECTUL III

a) n ;

b) pt. $m=3$ și $n=5$ $f(X) = g(X) \cdot (X^2 - 2X + 5)$ și deci $f(z_1) = f(z_2) = 0$

c) 0;

d) $m=3$ și $n=5$;

e) $z_1^3 = z_2^3 = 1$, de unde $z_1^3 + z_2^3 = 2$.

f) $z_1^{2007} + z_2^{2007} = (z_1^3)^{669} + (z_2^3)^{669} = 2$.

g) $-\frac{m}{n}$.

.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$ și $f''(x) = 6x$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = -3$.

c) $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ și $f'(x) < 0$ pentru $x \in (-1, 1)$, obținem că f este crescătoare pe $(-\infty, -1)$, f este crescătoare pe $(1, \infty)$ și f este descrescătoare pe $(-1, 1)$.

d) $x_1 = -1, x_2 = 1$;

e) $f(x) \leq 2$ pentru orice $x \leq 2$ și $f(x) \geq -2$ pentru orice $x \geq -2$, deci
 $-2 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in [0,2]$

f) Folosind inegalitățile de la e) avem $-2 \int_0^2 dx \leq \int_0^2 f(x)dx \leq 2 \int_0^2 dx \Rightarrow -4 \leq \int_0^2 f(x)dx \leq 4$.

g) $e^{-3.2007}$.