

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**PROBA D**

**Varianta ....011**

**Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările**

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze  $\sin 30^\circ + \sin 150^\circ$ .
- (4p) b) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral de latură  $2\sqrt{3}$ .
- (4p) c) Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre dreptele  $d_1 : 2x - y + 5 = 0$  și  $d_2 : x + y + 1 = 0$ .
- (4p) d) Să se determine distanța de la punctul  $A(2, -1)$  la dreapta  $d_1 : 2x - y + 5 = 0$ .
- (2p) e) Să se calculeze raza cercului  $x^2 + y^2 = 9$ .
- (2p) f) Să se determine ecuația tangentei la elipsa  $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1$  în punctul  $M(4,2)$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1. Se consideră mulțimea  $A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 20\}$ .
  - (3p) a) Să se determine numărul submulțimilor mulțimii  $A$ .
  - (3p) b) Să se determine câte submulțimi cu trei elemente conține mulțimea  $A$ .
  - (3p) c) Să se determine câte submulțimi ale mulțimii  $A$  conțin elementul 2.
  - (3p) d) Să se calculeze care este probabilitatea ca un element al mulțimii  $A$  să fie divizibil cu 10.
  - (3p) e) Să se calculeze suma elementelor mulțimii  $A$ .
  
2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .
  - (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
  - (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
  - (3p) c) Să se determine asimptotele la graficul funcției  $f$ .
  - (3p) d) Să se arate că  $0 < f(x) \leq 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
  - (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p ).**

Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , unde

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$  și polinomul  $f = X^2 - (a+d)X + ad - bc$  cu rădăcinile distincte, notate cu

$$z_1 \text{ și } z_2 \text{ și matricele } X = \frac{1}{z_1 - z_2}(A - z_2 I_2) \text{ și } Y = \frac{1}{z_2 - z_1}(A - z_1 I_2).$$

- (4p) a) Să se calculeze matricea  $A^2$ .
- (4p) b) Să se arate că  $z_1 + z_2 = a + d$  și  $z_1 z_2 = ad - bc$ .
- (2p) c) Să se arate că  $A^2 = (z_1 + z_2)A - z_1 z_2 I_2$ .
- (4p) d) Să se arate că  $A = z_1 X + z_2 Y$ .
- (2p) e) Să se arate că  $A^{k+2} = (z_1 + z_2)A^{k+1} - z_1 z_2 A^k$  oricare ar fi  $k \in \mathbb{N}^*$ .
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^n = z_1^n X + z_2^n Y$ .
- (2p) g) Să se calculeze matricea  $B^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x}{1+x}$  și se definește sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  prin  $a_1 = 2$  și

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

- (4p) a) Să se determine  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (4p) b) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ .
- (4p) c) Să se arate că  $f(x) \leq \sqrt{x}$ ,  $\forall x \in [0, \infty)$ .
- (2p) d) Folosind eventual punctul c), să se arate că  $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{2}{3}$ .
- (2p) e) Să se calculeze primii patru termeni ai sirului  $(a_n)_{n \geq 1}$ .
- (2p) f) Să se arate că sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este descrescător.
- (2p) g) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că  $a_n = \frac{2^n}{2^n - 1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , iar apoi să calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

## Varianta 011

### SUBIECTUL I

a) 1; b)  $3\sqrt{3}$ ; c)  $A(-2,1)$  d)  $d(A, d_1) = \frac{|2 \cdot 2 - (-1) + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{5}$ . e)  $r = 3$ .

f)  $x + 2y - 8 = 0$ .

### SUBIECTUL II

1.

a)  $2^{10}$ ; b)  $C_{10}^3 = 120$ . c)  $2^9$ . d)  $p = \frac{1}{5} = 0,2$ ; e)  $2 + 4 + \dots + 20 = \frac{2+20}{2} \cdot 10 = 110$ .

2.

a)  $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ . b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$ . c)  $y = 0$  asimptotă orizontală;

d)  $0 < f(x) \leq 1$ , revine la  $0 < 1 \leq 1 + x^2$ , inegalitate care are loc pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ ;

e)  $\frac{\pi}{4}$ .

### SUBIECTUL III

a)  $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$ .

b) Din  $z_1 + z_2 = a + d$  rezultă  $z_2 = a + d - z_1$ . Înlocuim în  $z_1 z_2 = ad - bc$  și obținem  $z_1(a + d - z_1) = ad - bc \Leftrightarrow -z_1^2 + (a + d)z_1 = ad - bc$  egalitate care are loc deoarece  $z_1$  este soluție a ecuației  $X^2 - (a + d)X + ad - bc = 0$ .

c) Înținând cont de rezultatele de la a) și b) avem

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)A - z_1 z_2 I_2 &= (a + d)A - (ad - bc)I_2 \\ &= \begin{pmatrix} (a + d)a - (ad - bc) & b(a + d) \\ c(a + d) & (a + d)d - (ad - bc) \end{pmatrix} = A^2. \end{aligned}$$

d)  $z_1 X + z_2 Y = \frac{z_1}{z_1 - z_2}(A - z_2 I_2) + \frac{z_2}{z_2 - z_1}(A - z_1 I_2) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2}A - \frac{z_1 z_2 - z_1 z_2}{z_1 - z_2}I_2 = A$ .

e) Avem  $(z_1 + z_2)A^{k+1} - z_1 z_2 A^k = A^k [(z_1 + z_2)A - z_1 z_2 I_2]$  și se folosește egalitatea de la c);

f) Se aplică principiul inducției complete și se ține cont de faptul că  $X^2 = X$ ,  $Y^2 = Y$ ,  $XY = YX = O_2$

g) Se consideră  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = -5$ ,  $d = 8$ . Se obține  $z_1 = 7$ ,  $z_2 = 3$  și

$$B^n = \frac{7^n}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} + \frac{3^n}{4} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

#### SUBIECTUL IV

a)  $f'(x) = \frac{2}{(1+x)^2}$ .

b) Cum  $f'(x) > 0$  pentru orice  $x \in (0, \infty)$ , rezultă că  $f$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ .

c) Inegalitatea devine  $1 - 2\sqrt{x} + x \geq 0 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{x})^2 \geq 0$  și are loc pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .

d) Folosind c) avem  $\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$ .

e)  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = f(a_1) = \frac{4}{3}$ ,  $a_3 = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{7}$ ,  $a_4 = f\left(\frac{8}{7}\right) = \frac{16}{15}$ .

f) Avem  $a_n > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Atunci  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{f(a_n)}{a_n} = \frac{2}{1+a_n} < 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  ceea ce arată că sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este descrescător.

g) Se aplică principiul inducției matematice și apoi  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = 1$ .