

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta010

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze numărul diagonalelor unui poligon convex cu 5 laturi.
- (4p) b) Să se determine $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin x = \frac{1}{2}$.
- (4p) c) Dacă $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ să se calculeze $\cos x$.
- (4p) d) Să se determine panta dreptei determinate de punctele $A(-1, -1)$ și $B(3, 3)$.
- (2p) e) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele $A(-1, -1)$ și $B(3, 3)$.
- (2p) f) Să se dea un exemplu de număr complex, nereal, care are modulul 1.

SUBIECTUL II (30p)

- Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = \frac{1}{2}$ și $a_2 = 1$.
 - Să se determine rația progresiei aritmetice.
 - Să se calculeze a_{10} .
 - Să se calculeze $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$.
 - Să se calculeze determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$.
 - Să se determine probabilitatea ca unul dintre primii 5 termeni ai progresiei $(a_n)_{n \geq 1}$ să fie soluție a ecuației $x^2 - 3x + 2 = 0$.
- Se consideră funcția $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$.
 - Să se calculeze $f(0)$.
 - Să se determine ecuațiile asymptotelor la graficul funcției f .
 - Să se calculeze $f'(x)$ pentru $x \in (-2, 2)$.
 - Să se arate că f este strict crescătoare pe $(-2, 2)$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 010

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $G = (-2,2)$, iar pentru orice $x, y \in G$ se definește operația \ast prin

$$x \ast y = \frac{4x + 4y}{4 + x \cdot y} \text{ și funcțiile } f : (-2,2) \rightarrow (0,+\infty); g : (0,+\infty) \rightarrow (-2,2), f(x) = \frac{2+x}{2-x} \text{ și}$$

$$g(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}.$$

- (4p) a) Să se arate că $x \ast y \in G$ pentru orice $x, y \in G$.
- (4p) b) Să se arate că $(x \ast y) \ast z = x \ast (y \ast z)$ pentru orice $x, y, z \in G$.
- (4p) c) Să se arate că există $e \in G$ astfel încât $x \ast e = e \ast x = x$ pentru orice $x \in G$.
- (2p) d) Să se calculeze $g \circ f$.
- (2p) e) Să se arate că f este inversabilă și să se determine inversa sa.
- (2p) f) Să se arate că $f(x \ast y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in G$.
- (2p) g) Să se calculeze $\frac{2}{2} \ast \frac{2}{4} \ast \frac{2}{6} \ast \dots \ast \frac{2}{2006}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $g : \mathbf{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $g(x) = \arctg x$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(0)$ și $g(0)$.
- (4p) b) Să se determine $g'(x) - f'(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x)$.
- (2p) d) Să se arate că g este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (2p) e) Să se arate că $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 \arctg x \, dx$.
- (2p) g) Să se arate că $\frac{x}{1+x^2} < \arctg x$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.

Varianta 010

SUBIECTUL I

a) 5 diagonale; b) $x = \frac{\pi}{6}$; c) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. d) $m_{AB} = 1$; e) $M(1,1)$; f) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $r = a_2 - a_1 = \frac{1}{2}$; b) $a_{10} = a_1 + 9 \cdot r = 5$; c) $S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{55}{2}$; d) $\det(A) = -\frac{1}{2}$;
 e) $p = \frac{2}{5} = 0,4$.

2

a) $f(0) = \ln \frac{2}{2} = 0$; b) $x = 2$ este asimptotă verticală la stânga, $x = -2$ este asimptotă verticală la dreapta. c) $f'(x) = \frac{2-x}{2+x} \cdot \left(\frac{2+x}{2-x}\right)' = \frac{4}{4-x^2}$; d) $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-2, 2)$ deci f este crescătoare pe $(-2, 2)$; e) $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} \right) = 0$.

SUBIECTUL III

- a) Dacă $x, y \in (-2, 2)$, atunci $4 + xy > 0$. Condiția $x * y \in G$ revine la $-8 - 2xy < 4x + 4y < 8 + 2xy$ sau echivalent $\begin{cases} 0 < 2(x+2)(y+2) \\ 0 < 2(x-2)(y-2) \end{cases}$ inegalități care au loc pentru orice $x, y \in (-2, 2)$, deoarece $t+2 > 0$ și $t-2 > 0$ pentru orice $t \in (-2, 2)$.
- b) calcul direct;
- c) $e = 0$;

d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = x;$

e) $f \circ g = \mathbf{1}_{(0,\infty)}$ și $g \circ f = \mathbf{1}_{(-2,2)}$ rezultă că f este inversabilă și inversa funcției f este funcția g ;

f) calcul direct;

g) $N = \frac{2}{2} * \frac{2}{4} * \frac{2}{6} * \dots * \frac{2}{2006}$ atunci, din e) rezultă $N = g(2007) = \frac{1003}{502}$.

SUBIECTUL IV

a) $f(0) = 0, g(0) = 0.$

b) $g'(x) - f''(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2};$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{1+x^2} = 0;$

d) Avem $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci g este crescătoare pe \mathbf{R} ;

e) Inegalitatea $-\frac{1}{2} \leq f(x)$ este echivalentă cu $0 \leq \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}$, care

are loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Analog $f(x) \leq \frac{1}{2}$.

f) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2};$

g) conform pct. b) funcția $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = g(x) - f(x)$ este crescătoare pe \mathbf{R} , deci $h(x) > h(0)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.