

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta007

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(1,3)$ și $B(-1, 2)$.
- (4p) b) Să se calculeze aria triunghiului ABC care are vârfurile $A(1,3)$, $B(-1, 2)$ și $C(3,5)$.
- (4p) c) Să se scrie ecuația cercului cu centrul în punctul $A(1,3)$ și raza 5 .
- (4p) d) Să se calculeze $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin 0 + \sin\frac{\pi}{2}$.
- (2p) e) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v}_1(1, \sqrt{2})$ și $\vec{v}_2(\sqrt{2}, -1)$.
- (2p) f) Să se calculeze modulul numărului complex $(1 - 2i)^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
- (3p) a) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $f(x) = 0$.
- (3p) b) Dacă $A = \{0,1,2,3,4\}$, să se calculeze probabilitatea ca alegând un element n din mulțimea A , numărul $f(n)$ să fie divizibil cu 3.
- (3p) c) Să se calculeze $(f \circ f)(1)$.
- (3p) d) Să se determine numărul real k astfel încât $f(x) = k(x-1)(x-2)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) e) Să se demonstreze că $f\left(\frac{3}{2} - x\right) = f\left(\frac{3}{2} + x\right)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot e^x$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f .
- (3p) c) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z} \text{ și } a^2 - 2b^2 = 1\}$.

- (4p) a) Să se demonstreze că $1 \in M$ și $0 \notin M$.
- (4p) b) Să se demonstreze că dacă $x, y \in M$ atunci $x \cdot y \in M$.
- (4p) c) Să se demonstreze că dacă $x \in M$ atunci $x \neq 0$ și $\frac{1}{x} \in M$.
- (2p) d) Să se demonstreze că mulțimea M formează o structură de grup comutativ în raport cu înmulțirea numerelor reale.
- (2p) e) Să se dea un exemplu de element $x = a + b\sqrt{2} \in M$, cu $b > 1$.
- (2p) f) Fie $x = a + b\sqrt{2} \in M$ cu $a > 1$ și $b > 1$. Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, există $a_n, b_n \in \mathbf{N}$, $a_n > 1$, $b_n > 1$, astfel încât $x^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
- (2p) g) Să se demonstreze că M conține cel puțin 2007 elemente.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - 1 - x \cdot \ln x$ și $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$,

$$g(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}$$

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se arate că $f(x) \leq 0$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$.
- (2p) d) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.
- (2p) e) Să se calculeze $g'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (2p) f) Folosind eventual punctul b) și notația $1+2x=t$, să se arate că funcția g este descrescătoare pe $(1, \infty)$.
- (2p) g) Să se arate că $(1+2\sqrt{2})^{\sqrt{3}} > (1+2\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$.

Varianta 007

SUBIECTUL I

- a) $AB = 5$. b) $S = 1$. c) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$. d) 0. e) 0. f) 5.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. b) $p = \frac{3}{5}$. c) $f(f(1)) = f(0) = 2$. d) $k = 1$.
 e) $f\left(\frac{3}{2} - x\right) = f\left(\frac{3}{2} + x\right) = x^2 - \frac{1}{4}, \forall x \in \mathbf{R}$.

2.

- a) $f'(x) = e^x(x+1)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
 b) $x = -1$ este punct de minim local, deci numărul cerut este 1.
 c) $x = -2$ este punct de inflexiune, deci numărul cerut este 1.
 d) $e - 1$.
 e) ∞ .

SUBIECTUL III

- a) $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$ și $1, 0 \in \mathbf{Z}$, $1^2 - 2 \cdot 0^2 = 1$ rezultă $1 \in M$.

$0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2}$, dar $0^2 - 2 \cdot 0^2 \neq 1$ rezultă $0 \notin M$.

- b) $x, y \in M$, $x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Z}$, $a^2 - 2b^2 = 1$ și $y = c + d\sqrt{2}, c, d \in \mathbf{Z}$, $c^2 - 2d^2 = 1$.

Atunci $x \cdot y = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}$,

$$ac + 2bd, ad + bc \in \mathbf{Z}, (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 = (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = 1.$$

- c) $x = a + b\sqrt{2} \in M$, $x \neq 0$ (din a)), $\frac{1}{x} = a + (-b)\sqrt{2} \in M$

d) Se verifică axiomele grupului.

- e) $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

f) Pentru $n = 1$ avem $x = a_1 + b_1\sqrt{2} \Rightarrow a_1 = a, b_1 = b$. Presupunem că

$$x^k = a_k + b_k\sqrt{2}, a_k, b_k > 1 \Rightarrow x^{k+1} = x^k \cdot x = a \cdot a_k + 2b \cdot b_k + (a \cdot b_k + b \cdot a_k)\sqrt{2}.$$

Fie $a_{k+1} = a \cdot a_k + 2b \cdot b_k$, $b_{k+1} = a \cdot b_k + b \cdot a_k$. Cum $a, b, a_k, b_k > 1 \Rightarrow a_{k+1}, b_{k+1} > 1$.

g) $x = 3 + 2\sqrt{2} \in M$ și din f) și b) deducem că $x^n \in M, \forall n \in \mathbf{N}^*$ și $x < x^2 < x^3 < \dots < x^n < \dots$, rezultă $A = \{x, x^2, \dots, x^n, \dots\} \subset M$ are o infinitate de elemente.

SUBIECTUL IV

- a) $f'(x) = -\ln x, \forall x \in (0, \infty)$.

- b) Ecuația $f'(x)=0$ are soluția $x=1$ care este punct de maxim global pentru f , deci $f(x) \leq f(1) = 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- c) 2.
- d) $\frac{e^2}{4} - e + \frac{1}{4}$.
- e) $g'(x) = \frac{2x - (1+2x) \cdot \ln(1+2x)}{x^2 \cdot (1+2x)}$.
- f) Cu notația indicată, numărătorul de la $g'(x)$ devine exact $f(t) \leq 0$, pentru orice $t > 1$ (din $x > 0$). Concluzia este imediată.
- g) Din $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3}$ și g este descrescătoare pe $(1, \infty)$, deducem $g(\sqrt{2}) > g(\sqrt{3})$ de unde rezultă inegalitatea.