

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta006

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $(2 + 3i)^2$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea medianei din B în triunghiul ABC , unde $A(3, 2)$, $B(-2, 3)$ și $C(5, 0)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right)$.
- (4p) d) Să se determine lungimea înălțimii din A în triunghiul ABC , dacă $AB = 6$, $AC = 8$ și $BC = 10$.
- (2p) e) Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(3, 2)$, $B(2, \alpha)$ și $C(4, 3)$ să fie coliniare.
- (2p) f) Să se scrie ecuația tangentei la cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 9$ în punctul $P(0, -3)$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se determine $\hat{x} \in \mathbf{Z}_5$ dacă $\hat{2}\hat{x} + \hat{4} = \hat{3}$.
- (3p) b) Să se calculeze $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$.
- (3p) c) Să se calculeze $\log_3 2 + \log_3 12 - \log_3 8$.
- (3p) d) Să se rezolve în intervalul $[-1, \infty)$ ecuația $\sqrt{x+1} = 3$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $3^n < 10$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + x - 1$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 + f(0)}{5n^2 - f(0)}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (4p) a) Să se verifice că $A + I_2 = B$.
- (4p) b) Să se calculeze determinantul și rangul matricei B .
- (4p) c) Să se verifice că $A^2 = A$.
- (2p) d) Să se calculeze A^{2007} .
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $B^n = I_2 + (2^n - 1)A$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se arate că $aA + bB + cI_2 \neq C$, $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Să se arate că matricea $X = A^n + B^n$ este inversabilă $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2^{1-x^2}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
 - (4p) b) Să se arate că, dacă $x \in [1, 2]$, atunci $(x-1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) \geq 0$.
 - (4p) c) Utilizând eventual inegalitatea de la punctul b), să se arate că, dacă $x \in [1, 2]$, atunci $\frac{1}{x} + \frac{x}{2} \leq \frac{3}{2}$.
 - (2p) d) Să se verifice că $\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{2} \leq \frac{3}{2}$, $\forall x \in [0, 1]$.
 - (2p) e) Să se arate că, dacă $u, v \in \mathbf{R}$, atunci $(u+v)^2 \geq 4uv$.
 - (2p) f) Integrând inegalitatea de la punctul d), să se arate că
- $$\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{3}{2}.$$
- (2p) g) Utilizând inegalitatea de la punctul e), să se arate că
- $$\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \right) \cdot \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \leq \frac{9}{8}.$$

Varianta 006

SUBIECTUL I

- a) 13.
- b) $2\sqrt{10}$
- c) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- d) 4,8.
- e) 1.
- f) $y = -3$

SUBIECTUL II

- 1.
- a) $\hat{2}$.
- b) 16.
- c) 1.
- d) 8.
- e) $\frac{2}{5}$.
- 2.
- a) $5x^4 + 1$.
- b) $-\frac{1}{3}$.
- c) 1.
- d) $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$. Deci funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- e) $\frac{12}{5}$.

SUBIECTUL III

a) $A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$

b) $\det B = 2$; rang $B = 2$.

c) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$.

d) Din c), avem $A^2 = A$.

Presupunem $A^k = A$ și demonstrăm $A^{k+1} = A, \forall k \geq 1, k \in \mathbf{N}$.

$A^{k+1} = A^k \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$. Deci $A^n = A, \forall n \geq 1, n \in \mathbf{N}$. Atunci $A^{2007} = A$.

e) Pentru $n = 1$ se obține $B = A + I_2$, evident din a), deci s-a realizat etapa de verificare.

Presupunem $B^k = I_2 + (2^k - 1)A, \forall k \in \mathbf{N}^*$ și demonstrăm

$$B^{k+1} = I_2 + (2^{k+1} - 1)A, \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

$$B^{k+1} = B^k \cdot B = [I_2 + (2^k - 1)A](A + I_2) = A + I_2 + (2^k - 1)A^2 + (2^k - 1)A = A + I_2 + (2^k - 1)A + (2^k - 1)A =$$

$$= I_2 + (2^{k+1} - 1)A, \text{ adevarat}\forall k \in \mathbf{N}^*.$$

$$\text{Deci } B^n = I_2 + (2^n - 1)A, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

f) $aA + bB + cI_2 = \begin{pmatrix} b+c & a+b \\ 0 & a+2b+c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ deoarece $0 \neq 3$.

g) Matricea $X = A^n + B^n$ este inversabilă, dacă $\det(A^n + B^n) \neq 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Dar din **d**), avem $A^n = A, \forall n \in \mathbf{N}^*$ iar din **e**) avem $B^n = I_2 + (2^n - 1)A$.

Obținem $A^n + B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 2^n + 1 \end{pmatrix}$.

Obținem $\det(A^n + B^n) = 2^n + 1 \neq 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$, deci $X = A^n + B^n$ este inversabilă, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = -x \cdot 2^{2-x^2} \ln 2$.

b) Cum $x \in [1, 2]$ avem $x - 1 \geq 0$.

Cum $x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$. Deci $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \geq 0$.

Atunci $(x-1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) \geq 0, \forall x \in [1, 2]$.

c) Se verifică prin calcul direct.

d) Se arată că $f(x) \in [1, 2], \forall x \in [0, 1]$.

Dar din **c**), avem $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} \leq \frac{3}{2}, \forall x \in [1, 2]$.

Deci $\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{2} \leq \frac{3}{2}, \forall x \in [0, 1]$.

e) $(u+v)^2 \geq 4uv$ devine $u^2 - 2uv + v^2 \geq 0$.

Obținem $(u-v)^2 \geq 0, \forall u, v \in \mathbf{R}$, evident adevărată.

Deci $(u+v)^2 \geq 4uv \forall u, v \in \mathbf{R}$.

f) Din **d**), avem $\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{2} \leq \frac{3}{2}, \forall x \in [0, 1]$.

Integrând, obținem

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{3}{2} dx. \text{ Deci } \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{3}{2}.$$

g) Din **e)**, avem $(u+v)^2 \geq 4uv$.

$$\text{Atunci } \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq 4 \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \right).$$

Dar din **f)**, prin ridicare la pătrat obținem

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \left(\frac{3}{2} \right)^2.$$

$$\text{Atunci } 4 \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \right) \leq \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

Deducem

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \right) \cdot \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \leq \frac{9}{8}.$$