

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta004

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,3)$, $B(-1;1)$, $C(2;5)$.

- (4p) a) Să se determine coordonatele vectorului \overrightarrow{AB} .
- (4p) b) Să se determine lungimea vectorului \overrightarrow{AC} .
- (4p) c) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului $[BC]$.
- (4p) d) Să se calculeze $\sin(A\hat{B}C)$.
- (2p) e) Să se determine ecuația tangentei la parabola $y^2 = 3x$ în punctul $A(3,3)$.
- (2p) f) Să se determine ecuația cercului de diametru $[BC]$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine câte numere întregi aparțin intervalului $[-\sqrt{10}; \sqrt{15}]$.
- (3p) b) Să se determine numărul natural n dacă $2^{2n-1} = 32$.
- (3p) c) Să se determine numărul real pozitiv a dacă $\log_4 9 = \log_2 a$.
- (3p) d) Să se determine numărul real x dacă numerele $x+1$; $2x-3$ și $x+5$ (în această ordine) sunt în progresie aritmetică.
- (3p) e) Să se dea un exemplu de funcție neconstantă $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ pentru care $f(-2) = f(2)$.

2.

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (1 + x^2)e^x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se determine multimea punctelor de extrem local ale funcției f .
- (3p) c) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției f .
- (3p) d) Să se determine ecuația asymptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 e^{-x} f(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $H = \{A \in M_2(\mathbf{R}) \mid A - I_2 \text{ este inversabilă}\}$ și legea de compoziție “*” definită pe mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ astfel $A * B = AB - A - B + 2I_2$, $\forall A, B \in M_2(\mathbf{R})$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se arate că $A * B = (A - I_2)(B - I_2) + I_2$, $\forall A, B \in M_2(\mathbf{R})$.
- (4p) b) Să se arate că matricea $2I_2$ este element neutru pentru legea de compoziție “*” pe $M_2(\mathbf{R})$.
- (4p) c) Să se arate că legea de compoziție “*” este asociativă pe mulțimea $M_2(\mathbf{R})$.
- (2p) d) Să se arate că H este parte stabilă a mulțimii $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu legea “*”.
- (2p) e) Să se demonstreze că $(H, *)$ este grup.
- (2p) f) Să se arate că funcția $f : H \rightarrow M_2(\mathbf{R})$, $f(X) = X - I_2$ are proprietatea $f(X * Y) = f(X) \cdot f(Y)$, $\forall X, Y \in H$.
- (2p) g) Să se demonstreze că grupul $(H, *)$ este izomorf cu grupul multiplicativ al matricelor pătratice inversabile de ordinul doi.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : [0;1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$ și $g(x) = \ln(1 + x^2)$.

- (4p) a) Să se demonstreze că $0 \leq f(x) \leq 1$ și $0 \leq g(x) \leq 1$, $\forall x \in [0;1]$.
- (4p) b) Să se determine $f'(x)$ și $g'(x)$, $\forall x \in [0;1]$.
- (4p) c) Să se demonstreze că funcția $f - g$ este convexă pe $[0;1]$.
- (2p) d) Să se arate că $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [0;1]$.
- (2p) e) Să se arate că $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$, $\forall x \in [0;1]$.
- (2p) f) Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi - 2}{4}$.
- (2p) g) Să se arate că $\int_0^1 g(x)dx = \ln 2 + \frac{\pi - 4}{2}$.

Varianta 004

SUBIECTUL I

a) $\vec{AB}(-4, -2)$. b) $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$. c) $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$. d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. e) $2y - x - 3 = 0$.

f) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

a) -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. b) $n = 3$. c) $a = 3$. d) $x = 6$. e) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2$ sau $f(x) = x^4$ sau $f(x) = |x|$ sau ...

2.

a) $f'(x) = (x+1)^2 \cdot e^x, x \in \mathbf{R}$. b) Funcția nu are puncte de extrem local fiind strict crescătoare pe \mathbf{R} , deci mulțimea cerută este \emptyset . c) $f''(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x$, $x_1 = -1$ și $x_2 = -3$. d) $y = 0$ asimptotă orizontală. e) $\frac{4}{3}$.

SUBIECTUL III

a) Avem $(A - I_2)(B - I_2) + I_2 = AB - A - B + I_2 + I_2 = A * B, \forall A, B \in M_2(\mathbf{R})$

b) $A * (2I_2) = (A - I_2)I_2 + I_2 = A = 2I_2 * A, \forall A \in M_2(\mathbf{R}), 2I_2 \in M_2(\mathbf{R})$, deci $2I_2$ este element neutru.

c) $\forall A, B, C \in M_2(\mathbf{R})$, avem

$$(A * B) * C = X * C = (X - I_2)(C - I_2) + I_2 \stackrel{a)}{=} (A - I_2)(B - I_2)(C - I_2) \text{ și}$$

$A * (B * C) = A * Y \stackrel{a)}{=} (A - I_2)(Y - I_2) \stackrel{a)}{=} (A - I_2)(B - I_2)(C - I_2)$, de unde deducem că legea “*” este asociativă pe $M_2(\mathbf{R})$.

d) Dacă $A, B \in H$, atunci matricele $A - I_2$ și $B - I_2$ sunt inversabile. Cum

$A * B \in M_2(\mathbf{R})$, $\det(A * B - I_2) \stackrel{a)}{=} \det((A - I_2)(B - I_2)) = \det(A - I_2)\det(B - I_2) \neq 0$, deducem că $A * B \in H$, deci H este parte stabilă a mulțimii $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu legea “*”.

e) Din d) rezultă că H este parte stabilă în raport cu legea “*”. Asociativitatea rezultă din $H \subset M_2(\mathbf{R})$ și c). Elementul neutru este $E = 2I_2 \in H$. Simetrizabilitatea: $\forall A \in H$, relația $A * A' = A' * A = E \Leftrightarrow (A - I_2)(A' - I_2) = I_2 = (A' - I_2)(A - I_2)$, deci

$A' - I_2 \in M_2(\mathbf{R})$ este inversa matricei $A - I_2 \in M_2(\mathbf{R})$ și din $\det((A - I_2)(A' - I_2)) = \det(I_2) \Rightarrow \det(A' - I_2) = 1$, deci $A' \in H$.

f) Dacă $X, Y \in H$, atunci $f(X * Y) = f((X - I_2)(Y - I_2) + I_2) = f(X) \cdot f(Y)$.

g) Fie (G, \cdot) grupul multiplicativ al matricelor pătratice inversabile de ordinal doi. Atunci funcția $f : H \rightarrow G$, $f(X) = X - I_2$ este corect definită, bijectivă, iar din f) rezulă că este morfism de grupuri.

SUBIECTUL IV

a) $x \in [0, 1] \Rightarrow x \cdot \arctg x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \subset [0, 1]$ și $\ln(1 + x^2) \in [0, \ln 2] \subset [0, 1]$.

b) $f'(x) = \arctg x + \frac{x}{1+x^2}$, $g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $x \in [0, 1]$.

c) $(f - g)''(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$, $x \in [0, 1]$, deci $f - g$ este convexă.

d) Din c) avem că $(f - g)'$ este crescătoare pe $[0, 1]$, deci

$(f - g)'(x) \geq (f - g)'(0)$, $\forall x \in [0, 1]$. Atunci $f - g$ este crescătoare pe $[0, 1]$ și $(f - g)(0) = 0$ implică $f \geq g$.

e) Funcția radical fiind crescătoare pe $[0, \infty)$, din a) și d) rezultă inegalitatea de demonstrat.

f) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \arctg 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (x - \arctg x) \Big|_0^1 = \frac{\pi - 2}{4}$.

g) $\int_0^1 g(x) dx = \ln 2 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \ln 2 - 2 (x - \arctg x) \Big|_0^1 = \frac{\pi - 2}{4} + \ln 2$.