

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta003

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze numărul complex $z_1 + z_2$, unde $z_1 = 1+i$ și $z_2 = -1+i$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu extremitățile în punctele $A(2, -2)$ și $C(-2, 2)$.
- (4p) c) Să se determine partea reală a numărului complex $i^5 + i^6 + i^7 + i^8$.
- (4p) d) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele $d_1 : x + y = 0$ și $d_2 : x + \alpha \cdot y = 0$ să fie perpendiculare.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2, -2)$, $B(1, 1)$ și $C(-2, 2)$.
- (2p) f) Să se calculeze raza cercului $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se calculeze inversul față de înmulțire al elementului $\hat{5}$ în inelul $(\mathbf{Z}_9, +, \cdot)$.
- (3p) b) Să se calculeze $\frac{5!-4!}{2!}$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_9 x = 2$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2} - 9^x = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $3^n \leq 20$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x + 1$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n^2 + 3}{2n^2 - 3}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

- (4p) a) Să se verifice că $A + I_2 = B$.
- (4p) b) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- (4p) c) Să se verifice că $A^2 = A$.
- (2p) d) Să se calculeze A^{2007} .
- (2p) e) Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că $B^n = I_2 + (2^n - 1)A$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se arate că $aA + bB + cI_2 \neq C$, $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Să se arate că matricea $X = A^n + B^n$ este inversabilă $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = \cos x$ și $g(x) = \frac{1}{x}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și $g'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se calculeze $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^2(x) dx$.
- (4p) c) Să se calculeze $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g^2(x) dx$.
- (2p) d) Să se determine ecuația asymptotei verticale la graficul funcției g .
- (2p) e) Să se arate că $t^2 \cos^2 x - 2t \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall x > 0$.
- (2p) f) Integrând inegalitatea de la punctul e), să se arate că

$$t^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx - 2t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \geq 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

- g) Să se arate, utilizând eventual punctul f), că
- (2p) $\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx \right)^2 \leq \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \right).$

Varianta 003

SUBIECTUL I

- a) $2i$.
- b) $4\sqrt{2}$.
- c) 0.
- d) -1.
- e) 4.
- f) 1.

SUBIECTUL II

- 1.
- a) $\hat{2}$.
- b) 48.
- c) 81.
- d) $S = \{0, 2\}$.
- e) $\frac{2}{5}$.
- 2.
- a) $2^x \ln 2$.
- b) $\frac{1}{\ln 2} + 1$.
- c) $\ln 2$.
- d) $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- e) $\frac{25}{2}$.

SUBIECTUL III

- a) $A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$
- b) $\det A = 0$; rang $A = 1$.
- c) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$.

d) Din c), avem $A^2 = A$.

Presupunem $A^k = A$ și demonstrăm $A^{k+1} = A, \forall k \geq 1, k \in \mathbf{N}$.

$A^{k+1} = A^k \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$. Deci $A^n = A, \forall n \geq 1, n \in \mathbf{N}$. Atunci $A^{2007} = A$.

e) Pentru $n = 1$ se obține $B = A + I_2$, evident din a), deci s-a realizat etapa de verificare.

Presupunem $B^k = I_2 + (2^k - 1)A, \forall k \in \mathbf{N}^*$ și demonstrăm

$$B^{k+1} = I_2 + (2^{k+1} - 1)A, \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

$$B^{k+1} = B^k \cdot B = [I_2 + (2^k - 1)A](A + I_2) = A + I_2 + (2^k - 1)A^2 + (2^k - 1)A = A + I_2 + (2^k - 1)A + (2^k - 1)A =$$

$$= A(2^{k+1} - 1) + I_2 = I_2 + (2^{k+1} - 1)A, \text{ adevarat } \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

$$\text{Deci } B^n = I_2 + (2^n - 1)A, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

f) $aA + bB + cI_2 = \begin{pmatrix} a+2b+c & a+b \\ 0 & b+c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ deoarece $0 \neq 7$.

g) Matricea $X = A^n + B^n$ este inversabilă, dacă $\det(A^n + B^n) \neq 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Dar din d), avem $A^n = A$, iar din e), avem $B^n = I_2 + (2^n - 1)A$.

Obținem $A^n + B^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 2^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Obținem $\det(A^n + B^n) = 2^n + 1 \neq 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$, deci $X = A^n + B^n$ este inversabilă, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = -\sin x$;

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^2(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin 2x)' dx \right] = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} (-\cos 2x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} (-\cos 2\pi) \right] = \frac{\pi}{4}$.

c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g^2(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{\pi}$.

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ deci $x = 0$ este asimptotă verticală.

e) $t^2 \cos^2 x - 2t \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 0$, devine $\left(t \cos x - \frac{1}{x} \right)^2 \geq 0$, adevărată $\forall t \in \mathbf{R}, \forall x > 0$.

f) Integrând inegalitatea de la punctul e), obținem

$$t^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx - 2t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}.$$

g) Din f), avem că $\Delta \leq 0$; atunci $\Delta = \left(2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx \right)^2 - 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \leq 0$ sau

$$\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx \right)^2 \leq \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \right).$$

A large, semi-transparent watermark "SNEE" is positioned vertically along the left side of the page. The letters are bold and slanted upwards. Small, light gray diamond shapes of varying sizes are scattered across the page, particularly around the watermark.