

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**PROBA D**

**Varianta ....002**

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele  $A(3,-3)$  și  $B(-3,3)$ .
- (4p) b) Să se determine partea reală a numărului complex  $z = (3i)^3$ .
- (4p) c) Să se arate că vectorul  $4\vec{i} + 3\vec{j}$  are lungimea egală cu 5.
- (4p) d) Să se dea un exemplu de dreaptă paralelă cu dreapta de ecuație  $y - 3x - 3 = 0$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi$ .
- (2p) f) Să se calculeze aria unui triunghi care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 și 5.

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se calculeze câte numere de 3 cifre au suma ultimelor două cifre egală cu 3.
- (3p) b) Să se dea un exemplu de matrice  $A \in M_2(\mathbf{R})$  pentru care  $\det(A) = 3$ .
- (3p) c) Să se determine numărul real  $x$  pentru care  $\log_3(3+x) = 3$ .
- (3p) d) Să se determine toate elementele  $\hat{y} \in \mathbf{Z}_6$  pentru care  $\hat{3} \cdot \hat{y} = \hat{3}$ .
- (3p) e) Să se dea un exemplu de trei numere în progresie aritmetică astfel încât suma ultimelor două numere este 3.

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$ .
- (3p) c) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(3x)}{x}$ .
- (3p) d) Să se găsească trei puncte de extrem local ale funcției  $f$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^{3\pi} f(x)dx$ .

Descarcat de pe site-ul [ebacalaureat.ro](http://ebacalaureat.ro)

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

**Varianta 002**

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră în  $M_2(\mathbf{R})$  matricele  $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și pentru orice matrice

$A \in M_2(\mathbf{R})$  se definește funcția  $f_A : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $f_A(z) = \det(A - z \cdot I_2)$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $\det(H)$ .
- (4p) b) Să se arate că pentru orice matrice  $A \in M_2(\mathbf{R})$  este adevărată egalitatea  $(A + i \cdot I_2)(A - i \cdot I_2) = A^2 + I_2$ , unde  $i \in \mathbf{C}$ ,  $i^2 = -1$ .
- (4p) c) Să se arate că ecuația  $f_H(z) = 0$  nu are rădăcini raționale.
- (2p) d) Să se găsească două matrice diferite  $A, B \in M_2(\mathbf{R})$  pentru care  $f_A(1) = f_B(1)$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $f_H(i)$ .
- (2p) f) Să se arate că  $\det(H^2 + I_2) = f_H(i) \cdot f_H(-i)$ .
- (2p) g) Să se arate că pentru orice matrice  $X \in M_2(\mathbf{R})$  pentru care  $\det(X) = -1$ , este adevărată inegalitatea  $\det(X^2 + I_2) \geq 4$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \ln(1 + x^2)$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $g'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se arate că  $f$  și  $g$  au același punct de extrem local.
- (4p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)}$ .
- (2p) d) Să se calculeze  $I = \int_0^1 f(x)dx$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $J = \int_0^1 g(x)dx$ .
- (2p) f) Să se arate că pentru orice număr real  $x$  este adevărată inegalitatea  $f(x) \geq g(x)$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\ln 2 + \frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{3}$ .

## Varianta 002

### SUBIECTUL I

- a)  $AB = \sqrt{(-3-3)^2 + (3+3)^2} = 6\sqrt{2}$ .
- b)  $z = 3^3 \cdot i^3 = -27i$ , deci  $\operatorname{Re}(z) = 0$ .
- c)  $\left| 4\vec{i} + 3\vec{j} \right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ .
- d)  $y - 3x = 0$ . (justificați alegerea făcută !)
- e) Cam simplu  $1 + 0 = 1$ .
- f) Triunghiul fiind dreptunghic ( $5^2 = 3^2 + 4^2$ ) avem că  $S = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ .

### SUBIECTUL II

1.

- a) Un număr  $\overline{abc}$  convine dacă  $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$  și  $b + c = 3$ , deci  $(b, c) \in \{(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)\}$ . În total sunt 36 de numere.

- b) De exemplu  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , pentru care  $\det A = 3 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 3$ .

- c) Convine  $x > 3$  și  $3+x = 27$ , deci  $x = 24$  este soluție.

- d) Verificând elementele lui  $\mathbf{Z}_6$ , obținem  $\hat{y} \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}$ .

- e) De exemplu -9, -2, 5. (de ce este progresie? mai găsiți și alte exemple?)

2.

- a)  $f'(x) = \cos x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

- b) Avem că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 = 3$ .

- c) Deoarece  $\sin t \in [-1, 1], \forall t \in \mathbf{R}$ , avem că limita cerută este 0.

- d) Deoarece  $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbf{R}$ , avem că  $x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = 2\pi + \frac{\pi}{2}$  sunt puncte de maxim, iar  $x_3 = -\frac{\pi}{2}$  este punct de minim. (de exemplu)

- e)  $\int_0^{3\pi} f(x) dx = -\cos x \Big|_0^{3\pi} = 2$ . (calcule complete la examen!)

### SUBIECTUL III

- a)  $\det H = -1$ .

- b)  $(A + i \cdot I_2)(A - i \cdot I_2) = A^2 - i \cdot A + i \cdot A - i^2 \cdot I_2 = A^2 + I_2$ .

c) Dacă  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ , atunci

$$A - z \cdot I_2 = \begin{pmatrix} a-z & b \\ c & d-z \end{pmatrix}, f_A(z) = \begin{vmatrix} a-z & b \\ c & d-z \end{vmatrix} = z^2 - (a+d) \cdot z + ad - bc \quad (1)$$

Din (1) avem:  $f_H(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 3z - 1 = 0$ , deci  $z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \notin \mathbf{Q}$ .

d) Luăm  $A = I_2, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  și folosind (1) avem  $f_A(1) = 0 = f_B(1), A \neq B$ .

e) Folosind (1) avem că  $f_H(i) = -2 - 3i$ .

f) Deoarece  $f_H(-i) = -2 + 3i$ , avem că

$$f_H(-i) \cdot f_H(i) = 13, \det(H^2 + I_2) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 13, \text{adică are loc egalitatea cerută.}$$

g) Fie  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}), ad - bc = -1$ . Avem:

$$\det(X^2 + I_2) = \det(X + i \cdot I_2) \cdot \det(X - i \cdot I_2) = \begin{vmatrix} a+i & b \\ c & d+i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a-i & b \\ c & d-i \end{vmatrix} = 4 + (a+d)^2 \geq 4.$$

#### SUBIECTUL IV

a)  $f'(x) = 2x, g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}, x \in \mathbf{R}$ .

b) Deoarece  $f'(x) < 0, g'(x) < 0$  pentru  $x < 0, f'(x) > 0, g'(x) > 0$  pentru  $x > 0$  și  $f'(0) = 0, g'(0) = 0$ , avem că  $x = 0$  este punct de minim local atât pentru  $f$ , cât și pentru  $g$ .

c) Cu regula lui L'Hospital avem că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$ . ( se poate și altfel ? )

d)  $I = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$ .

e)  $J = x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx = \ln 2 - 2(x - \arctg x) \Big|_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ .

f) Din  $f'(x) - g'(x) = \frac{2x^3}{1+x^2}$ , deducem că  $x = 0$  este punct de minim pentru  $f - g$ , deci  $f(x) - g(x) \geq f(0) - g(0), \forall x \in \mathbf{R}$ , deci are loc inegalitatea dorită.

g) Din f) deducem că  $\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 g(x) dx \Leftrightarrow \ln 2 + \frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{3}$ .