

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta001

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(2,5)$, $C(5,1)$.

- (4p) a) Să se calculeze numărul complex $2z - 2z^2$, dacă $z = 2 - 3i$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului $[BC]$.
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (4p) d) Să se calculeze distanța de la punctul A la dreapta BC .
- (4p) e) Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât $x + my + n = 0$ să reprezinte ecuația dreptei AC .
- (2p) f) Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x = 27^{x+1}$.
 - (3p) b) Se consideră progresia aritmetică $3, 9, 15, 21, \dots$. Să se determine termenul de rang 33 al progresiei.
 - (3p) c) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} C_4^2 & C_5^1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.
 - (3p) d) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 2007$. Să se calculeze $(f \circ f)(2007)$.
 - (3p) e) Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție definită prin $x \circ y = xy - 2x + 3y - 5$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$. Să se rezolve ecuația $2 \circ x = 6$.
2. Se consideră funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (-1, \infty)$.
 - (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
 - (3p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
 - (3p) d) Să se determine ecuația asimptotei spre ∞ la graficul funcției f .
 - (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nf(n)}{n^2 + 2007}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea M formată din toate matricele cu 2 linii și 2 coloane cu proprietatea că elementele fiecărei matrice din mulțimea M formează mulțimea $\{1,2,3,4\}$.

- (4p) a) Să se verifice că $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M$.
- (4p) b) Să se calculeze determinantul matricei $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
- (4p) c) Să se arate că dacă $C \in M$, atunci $\det(C) \neq 0$.
- (2p) d) Să se calculeze rangul matricei $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $X \in M$, atunci $-10 \leq \det(X) \leq 10$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $B \in M$, atunci $B^{-1} \notin M$.
- (2p) g) Să se determine numărul elementelor mulțimii M .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$ și $g(x) = f'(x)$.

- (4p) a) Să se determine $g(x)$, $x > 0$.
- (4p) b) Să se arate că funcția g este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.
- (4p) c) Să se arate că $g(x) > 0$, $\forall x > 0$.
- (2p) d) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$ există $c_n \in (n, n+1)$ astfel încât $g(c_n) = f(n+1) - f(n)$.
- (2p) e) Să se arate că $g(n+1) < f(n+1) - f(n) < g(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că
- $$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$
- 2p) g) Folosind eventual punctele e) și f), să se arate că $\frac{n}{2(n+2)} < \ln \frac{2n+2}{n+2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Varianta 001

SUBIECTUL I

- a) $14 + 18i$.
- b) 5.
- c) 5.
- d) 2.
- e) $m = 2, n = -7$.
- f) $\left(\frac{7}{2}; 3\right)$

SUBIECTUL II

1.

- a) $x = -3$.
- b) $a_{33} = 195$.
- c) -3
- d) 2007.
- e) $x = 3$.

2.

- a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$.
- b) $\frac{3}{4}$.
- c) $\frac{3}{2} + \ln 2$.
- d) $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.
- e) 1

SUBIECTUL III

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M$ deoarece elementele sale formează mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) -2.

c) Fie $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ distințe.

Cum $C \in M$, atunci $C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$.

Atunci $\det C = a_1a_4 - a_2a_3 \in \{\pm 5, \pm 10, \pm 2\}$

Deci $\det C \neq 0, \forall C \in M$.

d) Rangul lui A este 2.

e) Din c), avem $\det C \in \{\pm 5, \pm 10, \pm 2\}$. Deci $-10 \leq \det(X) \leq 10, \forall x \in M$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

f) Cum $B \in M$ atunci $C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ distințe.

Din c), dacă $B \in M$, atunci $\det(B) \neq 0$. Deci B este inversabilă.

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^* = \begin{pmatrix} \frac{a_4}{a_1 a_4 - a_2 a_3} & -\frac{a_2}{a_1 a_4 - a_2 a_3} \\ -\frac{a_3}{a_1 a_4 - a_2 a_3} & \frac{a_1}{a_1 a_4 - a_2 a_3} \end{pmatrix}.$$

Dacă $a_1 a_4 - a_2 a_3 > 0 \Rightarrow -\frac{a_2}{a_1 a_4 - a_2 a_3} < 0 \Rightarrow B^{-1} \notin M$.

Dacă $a_1 a_4 - a_2 a_3 < 0 \Rightarrow \frac{a_4}{a_1 a_4 - a_2 a_3} < 0 \Rightarrow B^{-1} \notin M$.

g) $4! = 24$.

SUBIECTUL IV

a) $g(x) = f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

b) $g'(x) = \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. Atunci g este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

c) $g(x) = \frac{1}{x(x+1)}$. Dar $x > 0$. Deci $g(x) > 0$, $\forall x > 0$.

d) Cum f este funcție Rolle pe $[n, n+1]$. din teorema lui Lagrange există $c_n \in (n, n+1)$ astfel încât $f(n+1) - f(n) = (n+1-n)f'(c_n)$. Dar $f'(c_n) = g(c_n)$.

Obținem $g(c_n) = f(n+1) - f(n)$.

e) $c_n \in (n, n+1)$. Cum g este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$ obținem

$g(n+1) < g(c_n) < g(n)$. Din d), avem $g(n+1) < f(n+1) - f(n) < g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

f) $P(1)$ este verificată : $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$. Presupunem

$$P(n) : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ adevarata. Demonstrăm}$$

$$P(n+1) : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}. \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Avem } \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}, \text{adică } \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2},$$

$$\text{adică } \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Deci $P(n)$ este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

g) Din **e)**, $g(n+1) < f(n+1) - f(n) < g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci

$$g(2) < f(2) - f(1)$$

$$g(3) < f(3) - f(2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g(n+1) < f(n+1) - f(n).$$

Prin adunare obținem

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} < f(n+1) - f(1)$$

Din **f)**, avem $\frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{1 \cdot 2} < \ln \frac{n+1}{n+2} - \ln \frac{1}{2}$. Atunci $\frac{n}{2(n+2)} < \ln \frac{2n+2}{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.