

**Examenul de bacalaureat 2011**  
**Proba E. c)**  
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**Varianta 5**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

**I. FELADAT** **(30 punct)**

- 5p** 1. Határozd meg  $x \in \mathbb{R}$  értékét, ha az  $x-1$ ,  $x+1$  és  $3x-1$  számok egy számtani haladvány egymás után következő tagjai!
- 5p** 2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5-x$  függvény. Számítsd ki  $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(10)$  értékét!
- 5p** 3. Oldd meg a valós számok halmazán a  $\sqrt{x-1} = x-3$  egyenletet!
- 5p** 4. Határozd meg egy 7 elemű halmaz kételemű rendezett részhalmazainak számát!
- 5p** 5. Számítsd ki az  $A(2,3)$  pont, valamint a  $d_1: 2x-y-6=0$  és  $d_2: -x+2y-6=0$  egyenesek metszéspontjának távolságát!
- 5p** 6. Számítsd ki az  $MNP$  háromszög  $M$  szögének koszinuszát, ha  $MN = 4$ ,  $MP = 5$  és  $NP = 6$ .

**II. FELADAT** **(30 punct)**

1. Adottak az  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  és  $X(a) = I_2 + aA$  mátrixok,  $a \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** a) Számítsd ki az  $A^2 - 3A$  mátrixot!
- 5p** b) Igazold, hogy  $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+3ab)$ , bármely  $a, b \in \mathbb{Z}$  esetén!
- 5p** c) Igazold, hogy bármely  $a \in \mathbb{Z}$  esetén az  $X(a)$  mátrix invertálható!
2. Az  $f = X^3 + 2X^2 - 5X + m$ ,  $m \in \mathbb{R}$  polinom gyökei  $x_1, x_2$  és  $x_3$ .
- 5p** a) Számítsd ki  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  értékét!
- 5p** b) Határozd meg  $m \in \mathbb{R}^*$  értékét, ha  $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ .
- 5p** c) Igazold, hogy bármely  $m \in \mathbb{R}$  esetén a  $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$  determináns értéke természetes szám!

**III. FELADAT** **(30 punct)**

1. Adott az  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$  függvény.
- 5p** a) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$  határértéket!
- 5p** b) Igazold, hogy  $f(x) > 0$ , bármely  $x \in [1, +\infty)$  esetén!
- 5p** c) Igazold, hogy az  $f$  függvény grafikus képének nincs aszimptotája a  $+\infty$  felé!
2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$  függvény.
- 5p** a) Számítsd ki a  $g: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x)$  függvény grafikus képének az  $Ox$  tengely körüli forgatásából keletkező forgástest térfogatát!
- 5p** b) Igazold, hogy  $f$  függvény tetszőleges  $F$  primitív függvénye növekvő az  $\mathbb{R}$  halmazon!
- 5p** c) Igazold, hogy  $\int_{-10}^{10} f(x) dx = 2 \int_0^{10} f(x) dx$ .