

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

ZĂVĐĂNĂ I

(30 baliv)

- 56 1. Докажіть, що $(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \cap \mathbb{Z} = \{2\}$.
- 56 2. Знайдіть дійсні значення m для яких пряма $x = 2$ є віссю симетрії параболи $y = x^2 + mx + 4$.
- 56 3. Розв'яжіть на множині $[0, 2\pi)$ рівняння $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.
- 56 4. Знайдіть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, для яких $C_n^2 + A_n^2 = 18$.
- 56 5. Знайдіть $a \in \mathbb{R}$, для яких прямі $d_1: ax + y + 2011 = 0$ і відповідно $d_2: x - 2y = 0$ є паралельними.
- 56 6. Нехай x – дійсне число, яке задовольняє рівняння $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$. Докажіть, що $\sin 2x = 1$.

ZĂVĐĂNĂ II

(30 baliv)

1. Дано матрицю $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, де $x \in \mathbb{R}$.
- 56 а) Докажіть, що $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$ для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}$.
- 56 б) Докажіть, що $(A(x) - A(y))^{2011} = O_3$ для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}$.
- 56 в) Знайдіть обернену до матриці $A(x)$, де $x \in \mathbb{R}$.
2. Дано $\alpha \in \mathbb{C}$ і многочлен $f = X^3 + (1 - \alpha)X^2 + (\alpha - 2)X + \alpha + (\alpha - 2)i \in \mathbb{C}[X]$.
- 56 а) Докажіть, що многочлен f має корінь -1 .
- 56 б) Докажіть, що якщо $p, q \in \mathbb{C}$ є комплексними числами і многочлен $g = X^2 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$ має два різні корені, комплексні спряжені числа, то p і q є дійсними числами і $p^2 < 4q$.
- 56 в) Знайдіть $\alpha \in \mathbb{C}$, для якого многочлен f має два різні корені, комплексні спряжені числа.

ZĂVĐĂNĂ III

(30 baliv)

1. Дано функцію $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + 1) - \ln(x - 1)$.
- 56 а) Докажіть, що функція f є строго спадною на $(1, +\infty)$.
- 56 б) Знайдіть асимптоти до графіка функції f .
- 56 в) Обчисліть $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x)$.
2. Дано функцію $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
- 56 а) Обчисліть $\int_1^4 f(\sqrt{x}) dx$.
- 56 б) Обчисліть площу поверхні, обмеженої графіком функції $g: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ і віссю Ox .
- 56 в) Докажіть, що $(4n + 2) \int_1^2 f^n(x) dx + n \int_1^2 f^{n-1}(x) dx = 0$.