CORRIGÉ

SESSION 2011

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

Partie 1: Connaissances 30 points

1ère partie: QCM (15 points)

1. C	**3,75 points**
2. C	**3,75 points**
3. D	**3,75 points**
4. B	**3,75 points**

2ème partie: questions de cours (15 points)

Question n°1 : **1.** En notant *A*, *B* et *C* les trois tiroirs et en numérotant les pulls, on peut modéliser un rangement par une suite de cinq lettres choisies parmi *A*, *B* et *C*. On obtient $3^5 = 243$ rangements possibles.	**3,5 points**
Question n°1 : **2.** Il y a 2^5 rangements qui n'utilisent jamais *A*, 2^5 qui n'utilisent jamais *B*, et 2^5 qui n'utilisent jamais *C*. Un seul rangement n'utilise ni *A* ni *B* (tous les pulls sont dans *C*), un seul n'utilise ni *A* ni *C*, et un seul n'utilise ni *B* ni *C*. Au total, il y a donc $3\times(2^5 - 1)$ pour lesquels au moins un tiroir reste vide. Le nombre de rangements pour lesquels aucun tiroir ne reste vide est donc : $3^5 - 3\times(2^5-1) = 150$.	**3,5 points**

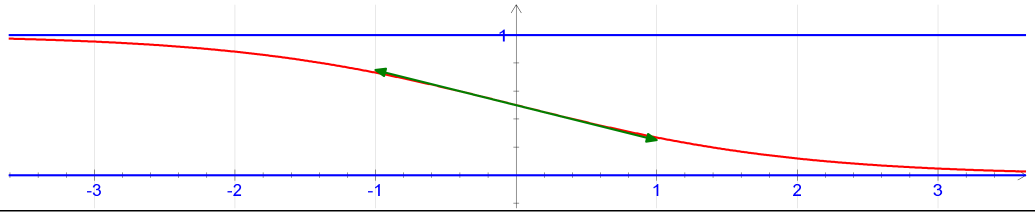
Question n°2 : **1.** $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{x^2 + y^2 + x - y}{x^2 + (y-1)^2}$ et $\mathrm{Im}(Z) = \dfrac{x - y + 1}{x^2 + (y-1)^2}$.	**4 points**
Question n°2 : **2.** Il faut avoir Im(*Z*) = 0soit $x - y + 1 = 0$ ET $x^2 + (y - 1)^2 \neq 0$. L'ensemble cherché est la droite d'équation $y = x + 1$, privée du point de coordonnées (0 ; 1).	**4 points**

Partie 2 : compétences 60 points

Exercice n°1 : 25 points

1. $u_{n+1} - u_n = \ldots = \dfrac{(1-u_n)(u_n+3)}{u_n+4} > 0$ car 0 < u_n < 1. Donc (u_n) est (strictement) croissante.	**5 points**
2. a. $v_{n+1} = \ldots = \dfrac{1}{5}v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$. Son premier terme est $v_0 = \dfrac{2u_0+3}{u_0+4} = .-\dfrac{1}{3}$.	**4 points** **1 point**
2. b. Comme $\lvert q \rvert = \left\lvert \dfrac{1}{5} \right\rvert < 1$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.	**5 points**
3. a. $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1-v_n}$.	**5 points**
3. b. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.	**5 points**

Exercice n°2 : 35 points

<table>
<tr><td>1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
Justifications …</td><td>2 points
2 points</td></tr>
<tr><td>1. b. La droite d’équation <i>y</i> = 0 est asymptote à (C) en +∞.
La droite d’équation <i>y</i> = 1 est asymptote à (C) en –∞.</td><td>2 points
2 points</td></tr>
<tr><td>2. a. $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$</td><td>4 points</td></tr>
<tr><td>2. b. <i>f’(x)</i> < 0 donc <i>f</i> est strictement décroissante sur IR.
<table>
<tr><td><i>x</i></td><td>–∞</td><td></td><td>+∞</td></tr>
<tr><td><i>f’</i>(<i>x</i>)</td><td></td><td>–</td><td></td></tr>
<tr><td><i>f</i>(<i>x</i>)</td><td>1</td><td>↘</td><td>0</td></tr>
</table>
<i>f</i>(0) = $\dfrac{1}{2}$</td><td>4 points</td></tr>
<tr><td>3. T₀ : $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$.</td><td>4 points</td></tr>
<tr><td>4. a. $f(-x) + f(x)$ = 1.</td><td>4 points</td></tr>
<tr><td>4. b. Pour tout réel <i>x</i>, les points de coordonnées (<i>x</i> ; <i>f</i>(<i>x</i>)) et (–<i>x</i> ; <i>f</i>(–<i>x</i>)) sont symétriques par rapport au point <i>A</i> de coordonnées (0 ; $\dfrac{1}{2}$). <i>A</i> est centre de symétrie de la courbe (C).</td><td>3 points</td></tr>
<tr><td>4. c.

</td><td>4 points (courbe: 2 pts ; asymptotes 1 pt tangente: 1 pt)</td></tr>
<tr><td>5. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)dx = \left[-\ln\left|1+e^{-x}\right|\right]_0^{\ln 2} = \ln\frac{4}{3}$.</td><td>4 points</td></tr>
</table>